

# 112 年度縣市學生學習能力檢測

## 數學五年級施測結果報告

---

國立臺中教育大學

National Taichung University of Education

測驗統計與適性學習研究中心

---

中華民國 112 年 12 月



## 目 錄

壹、背景與目的 .....	1
一、背景.....	1
二、目的.....	1
貳、參與縣市與檢測規模 .....	2
參、檢測對象與檢測工具 .....	3
一、檢測對象.....	3
二、檢測工具.....	4
肆、試題分析與教學建議 .....	6
伍、整體學力表現分析 .....	103
一、不同背景變項學生整體學力表現分析.....	103
二、國民小學五年級學生於不同能力指標之答對率表現.....	106
陸、整體教學建議 .....	110
柒、附錄 .....	127



## 壹、背景與目的

### 一、背景

測驗與評量是教育歷程中十分重要的一環，透過學力檢測可協助師生瞭解學生之學習成效與升學進路，及早發現待加強學生並啟動積極性教學介入，教育當局亦能評估施行的相關政策，透過調節教育資源來強化發展教學成效。

107 年開始，桃園市等五縣市以委託形式，由國立臺中教育大學測驗統計與適性學習研究中心協助辦理縣市學生學習能力檢測試題研發暨資料分析工作，108 年起，改以中心自辦學力檢測研發，各縣市依需求參與形式運作，112 年度有基隆市、新北市、桃園市、新竹縣、新竹市、苗栗縣、臺中市、南投縣、雲林縣、嘉義縣、嘉義市、臺南市、屏東縣、花蓮縣、澎湖縣以及金門縣等十六縣市共同參與，檢測對象為國民中小學三年級至八年級學生，檢測科目包含國語文、數學和英語文。

此份報告係根據檢測分析結果撰寫，現場教師可據以瞭解學生於各評量向度之表現情形，進而對學生進行適性適才之教學；教育決策者亦可更精準的將相關資源挹注於需求性相對較高的教育現場，讓教育和教學有效的朝「把每一個孩子帶上來」的方向前進。

### 二、目的

- (一) 測驗專責單位統一研發試題，降低各縣市命題壓力和研發成本。
- (二) 國民小學及國民中學學生學習能力檢測分析結果，協助教師瞭解學生學習概況以及科目內有待加強之內容向度。
- (三) 不同背景變項國民小學及國民中學學生學習能力表現之差異分析，可做為學校輔導或教育政策研擬之參考。

## 貳、參與縣市與檢測規模

本年度縣市學生學習能力檢測於 112 年 5 月 25 日進行，數學五年級施測人數為 96,230 人。各縣市在數學五年級之詳細參與情形如下表 2-1 所示。

表 2-1 112 年度國民小學學生學習能力檢測數學五年級縣市參與人數摘要表

參與縣市	報考學生人數	到考人數	缺考人數
基隆市	2,804	2,722	82
新北市	35,951	34,462	1,489
新竹縣	6,975	6,753	222
新竹市	5,488	5,341	147
苗栗縣	5,108	4,934	174
臺中市	1,378	1,334	44
南投縣	4,011	3,884	127
雲林縣	5,404	5,192	212
嘉義縣	3,033	2,953	80
嘉義市	2,718	2,612	106
臺南市	16,747	16,178	569
屏東縣	6,235	6,011	224
花蓮縣	2,642	2,550	92
澎湖縣	635	607	28
金門縣	699	697	2
總計	99,828	96,230	3,598

## 參、檢測對象與檢測工具

### 一、檢測對象

112 年參與國立臺中教育大學所承辦「國民小學數學五年級學生學習能力檢測」者為基隆市、新北市、新竹縣、新竹市、苗栗縣、臺中市、南投縣、雲林縣、嘉義縣、嘉義市、臺南市、屏東縣、花蓮縣、澎湖縣及金門縣等十五縣市之國民小學五年級學生（未排除資源班及特殊生），應考名冊羅列 99,828 人、實際施測人數 96,230 人，其中男生 49,577 人、女生 46,498 人、未填寫性別 155 人，整體缺考率約為 3.6%。

根據教育部統計處資料顯示，111 學年我國國民小學學校數為 2,671 校，參與本次學力檢測計 1,523 校，約佔全國國民小學總校數之 57%。參照傅仰止、蘇國賢、吳齊殷、廖培珊、謝淑惠（2018）對臺灣鄉鎮市區類型研究之分類，由於該計畫未包含金門縣和連江縣，本中心參考傅仰止等人（2018）研究的因子及縣市地區的人口結構，將金門縣鄉鎮市區類型分類。本次參與數學五年級學力檢測學校之 1,523 校中隸屬：

- ✓ 都會核心者( 人口密度、專科以上教育、青壯年人口及服務業百分比最高 )68 校。
- ✓ 工商市區 ( 僅次於都會核心之商業高度發展地區 ) 202 校。
- ✓ 新興市鎮( 同時具有活絡的工業生產活動以及商業服務和相關工作能力 ) 278 校。
- ✓ 傳統產業市鎮 ( 就業人口供給較低、老年居民較多，僅能固守既有的傳統產業 ) 187 校。
- ✓ 低度發展鄉鎮 ( 就業人口及教育程度低，老年人口偏多，無明顯工商業活動與發展 ) 476 校。
- ✓ 高齡化鄉鎮 ( 工商服務相關屬性最低，較低人口密度與教育程度 ) 177 校。
- ✓ 偏遠鄉鎮 ( 低度工商業發展，存有最低層教育程度及人數稀少的居民 ) 135 校。

## 二、檢測工具

「國民小學數學五年級學生學習能力檢測」(以下簡稱學力檢測)是由國立臺南大學教育系教授邀集臺南市現職國民小學教師組成命題團隊，一同編製、檢視而成。本次學力檢測試題包括「評量指標 - 知識向度」與「評量指標 - 認知向度」等兩個向度。其中，評量指標 - 知識向度包含數與計算、量與實測、幾何以及代數等四個指標；評量指標 - 認知向度包含概念理解、程序執行與解題思考等三個指標。學力檢測施測之正式題本總題數為 25 題，試題評量架構與試題各面向之題數分布如表 3-1 所示。

表 3-1 數學領域五年級正式題本評量指標架構與試題之題數分布

知識向度 \ 認知向度	認知向度		
	概念理解	程序執行	解題思考
數與計算	7	5	3
量與實測	-	1	1
幾何	1	-	5
代數	-	1	1

命題團隊為顧及試題分布之均衡性，依概念理解、程序執行與解題思考等三個評量指標 - 認知向度；數與計算、量與實測、幾何以及代數等四個評量指標 - 知識向度，二個面向進行測驗試題之設計。「**數與計算**」包括對大數取概數、乘、除直式計算、三步驟應用問題，含併式計算、因數與倍數，公因數與公倍數、等值分數，約、擴分與通分，異分母加減與比較、分數乘法，分數除以整數、多位小數、乘數是小數的乘法，商是小數的整數除法、分數及小數數線；「**量與實測**」包括體積(立方公分)、複名數時間的加減問題、時間的乘除計算問題；「**幾何**」包括三角形內角和、三角形兩邊和大於第三邊、扇形、線對稱圖形、三角形、平行四邊形及梯形面積公式；「**代數**」包括乘法對加法的分配律、四則運算性質、數量模式與推理。詳細試題內容於各評量指標之分布題數如表 3-2 所示。

表 3-2 數學領域五年級施測正式題本於評量指標之題數分析

向度	能力指標	題數	題號	
數與計算	概念理解	5-n-05、5-n-11、4-n-12、 5-n-12、4-n-09、5-n-02、 5-n-04	7	04、05、10、17、 18、24、25
	程序執行	5-n-06、5-n-01、 5-n-03、5-n-08、5-n-13	5	01、08、15、16、23
	解題思考	5-n-07、5-n-10、5-n-09	3	09、20、22
量與實測	程序執行	5-n-15	1	06
	解題思考	4-n-13	1	12
幾何	概念理解	5-s-04	1	02
	解題思考	5-s-03、5-s-05、4-s-09、 5-s-02、5-s-01	5	11、13、14、19、21
代數	程序執行	5-a-02	1	03
	解題思考	5-a-01	1	07

## 肆、試題分析與教學建議

本報告先分析「112 年國民小學數學五年級學生學習能力檢測」結果，再針對各試題提供相關建議，本試卷信度 Cronbach's alpha 值為 0.78，具一致性、穩定性及可靠性。

整份試卷未作答、連續五題以上未作答或答對率低於 0.25，且作答反應中有疑似亂答為無效樣本者予以刪除，資料整理後納入分析之有效樣本數為 91,111 人，其中各科試題分析結果呈現時所涉及的名詞分別定義如表 4-1：

表 4-1 試題分析名詞解釋

試題分析名詞	解釋
高分組	參與測驗有效樣本總分排名前 27%之學生。
低分組	參與測驗有效樣本總分排名後 27%之學生。
選答率	參與測驗有效樣本於此試題選答各選項之比率。
通過率	參與測驗有效樣本之試題答對率。
鑑別度	高分組試題答對率與低分組試題答對率之差。

試題代碼：本次學力檢測試題分析報告中，每道數學題幹均配有一組試題代碼「112-Mn<sub>1</sub>-□n<sub>2</sub>-n<sub>3</sub>」。其中，M 表示「數學科」；n<sub>1</sub> 表示「n<sub>1</sub> 年級」；□表示「知識向度」(A：數與計算；B：量與實測；C：幾何；D：代數)；n<sub>2</sub> 表示「認知向度」(1：概念理解；2：程序執行；3：解題思考)；n<sub>3</sub> 表示「題號」(01 表示第 1 題)。

題號	試題代碼		答案				
1	112-M5-A2-01		2				
評量指標	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。						
知識向度	數與計算	認知向度	程序執行				
題目	下列哪個分數和 $\frac{18}{15}$ <u>不一樣大</u> ？ ① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{40}{35}$ ③ $\frac{90}{75}$ ④ $\frac{96}{80}$						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：67%
	全 體	0.05	0.67	0.08	0.20	0.00	
	高分組	0.01	0.88	0.02	0.09	0.00	鑑別度：0.44
	低分組	0.13	0.44	0.15	0.28	0.00	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題給定一個分數，要求學生選出和該分數不一樣大的分數，評量學生利用約分與擴分找等值分數的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 67%，高分組答對率 88%，低分組答對率 44%，鑑別度 0.44。							
2. 67%的學生選擇正確答案②；5%的學生選擇①；8%的學生選擇③；20%的學生選擇④。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.44，正確答案為選項②，通過率為67%，顯示近七成的學生已具備利用約分與擴分找等值分數的能力。							

2. 有5%的學生選擇①(低分組有13%)，這些學生可能不具備利用約分與擴分找等值分數的能力；這些學生也可能誤解題意，選出和給定分數一樣大的分數。
3. 有8%的學生選擇③(低分組有15%)，這些學生可能不具備利用約分與擴分找等值分數的能力；這些學生也可能誤解題意，選出和給定分數一樣大的分數。
4. 有20%的學生選擇④(低分組有28%)，這些學生可能不具備利用約分與擴分找等值分數的能力；這些學生也可能看不到 $\frac{18}{15}$ 和 $\frac{96}{80}$ 分子和分母間 $\frac{16}{3}$ 倍分數倍轉換的關係，無法直接將 $\frac{18}{15}$ 改記成 $\frac{96}{80}$ ，所以判斷 $\frac{18}{15}$ 和 $\frac{96}{80}$ 不一樣大。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能誤解題意，選出一樣大的分數。
2. 五年級學生可以進行單位分數倍轉換，得到 $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$ ；也能進行整數倍轉換，得到 $\frac{18}{15} = \frac{90}{75}$ ，但是無法進行分數倍轉換，得到 $\frac{18}{15} = \frac{96}{80}$
3. 學生可能不具備利用約分與擴分找等值分數的能力。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 四年級已幫助學生在量的情境中理解等值分數，例如 $\frac{1}{2}$ 條繩子和 $\frac{4}{8}$ 條繩子一樣長，一袋水餃有40個， $\frac{1}{2}$ 袋水餃和 $\frac{4}{8}$ 袋水餃一樣多。

本基本學習內容幫助學生透過約分和擴分，將一個分數改記成它的等值分數，

例如將 $\frac{4}{8}$ 改記成 $\frac{1}{2}$ ，或將 $\frac{1}{2}$ 改記成 $\frac{4}{8}$ ，為用通分作簡單異分母分數的比較與加減鋪路。

## 2. 區分等值分數和約分、擴分與通分的意義：

等值分數：在選取相同單位量的情境下，兩分數雖然等分割的份數與合成的份數不同，但是兩分數所代表的量(值)一樣多。

例如： $\frac{1}{2}$ 條繩子和 $\frac{4}{8}$ 條繩子一樣長，可以記成 $\frac{1}{2}$ 條 =  $\frac{4}{8}$ 條。

$\frac{2}{5}$ 盒蘋果和 $\frac{4}{10}$ 盒蘋果一樣多，可以記成 $\frac{2}{5}$ 盒 =  $\frac{4}{10}$ 盒。

約分、擴分：將一個分數轉換成它的等值分數稱之為約分或擴分。

分割份數由少變多稱為擴分，例如 $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ ；

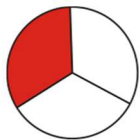
分割份數由多變少稱為約分，例如 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 。

通分：透過約分或擴分，讓兩個分數分母相等的活動稱為通分。

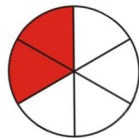
## 3. 約分與擴分教學時，因為分割的份數不同，因此要選用不同的量詞來描述，以將圓形色紙 3 等分及 6 等分為例，教師應說明將 1 張圓形色紙平分成 3 大塊，將另一張一樣大的圓形色紙平分成 6 小塊。

教師不可以說將 1 張圓形色紙平分成 3 塊，將另一張一樣大的圓形色紙平分成 6 塊，因為 3 塊中的「1 塊」和 6 塊中的「1 塊」大小不一樣，學生會混淆量詞「塊」的意義。

建議教學方式如下：



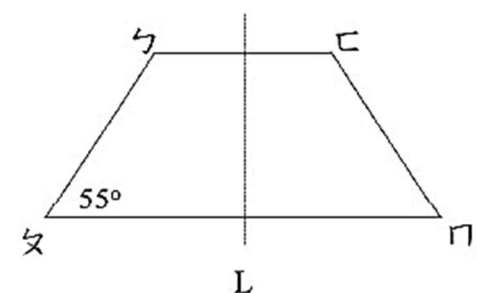
平分成 3 大塊



平分成 6 小塊

擴分： $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$  (1 大塊可以換成 2 小塊，3 大塊可以換成 6 小塊)。

約分： $\frac{2}{6} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$  (2 小塊可以換成 1 大塊，6 小塊可以換成 3 大塊)。

題號	試題代碼		答案				
2	112-M5-C1-02		2				
評量指標	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。						
知識向度	幾何	認知向度	概念理解				
題目	<p>下圖是一個線對稱圖形，以 <math>L</math> 為對稱軸，角 <math>\angle C</math> 是多少度？</p>  <p>① 55 ② 125 ③ 145 ④ 305</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：73%
	全 體	0.14	0.73	0.10	0.02	0.00	
	高分組	0.03	0.93	0.03	0.01	0.00	鑑別度：0.45
	低分組	0.30	0.48	0.18	0.04	0.00	
<p><b>一、試題分析</b></p> <p>(一) 評量目標</p> <p>本題給定線對稱圖形和一個角的角度，要求學生選出指定角的角度，評量學生是否具備利用線對稱性質解題的能力。</p> <p>(二) 數據說明</p> <p>1. 整體通過率 73%，高分組答對率 93%，低分組答對率 48%，鑑別度 0.45。</p> <p>2. 73%的學生選擇正確答案②；14%的學生選擇①；10%的學生選擇③；2%的學生選擇④。</p>							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為0.45，正確答案為選項②，通過率為73%，顯示超過七成的學生已具備利用線對稱性質解題的能力。
2. 有14%的學生選擇①(低分組有30%)，這些學生可能尚未具備利用線對稱性質解題的能力，直接把題目給定的角度當作答案。
3. 有10%的學生選擇③(低分組有18%)，這些學生可能尚未具備利用線對稱性質解題的能力。
4. 有2%的學生選擇④(低分組有4%)，這些學生可能尚未具備利用線對稱性質解題的能力；這些學生也可能直接利用周角減掉給定角， $360 - 55 = 305$ ，得到305度的答案。

### 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

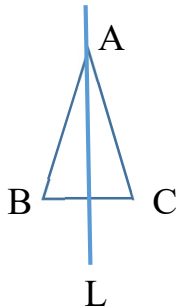
1. 學生可能尚未具備利用線對稱性質解題的能力。
2. 學生可能已具備利用線對稱性質解題的能力，能找出線對稱圖形的對稱角，知道對稱角一樣大，但無法掌握四邊形內角和為  $360^\circ$  而解題錯誤。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

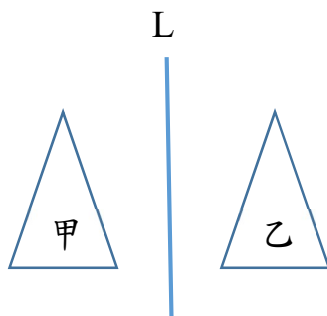
1. 國小階段線對稱圖形教學的重點是「判斷給定的一個圖形是否為線對稱圖形」，下圖中三角形 ABC 沿著 L 對折後，L 兩側的圖形完全重合，我們稱三角形 ABC 是線對稱圖形，稱 L 為對稱軸。  
對折後 AB 邊和 AC 邊完全重合，數學上稱 AB 邊的對稱邊是 AC 邊，AC 邊的對稱邊是 AB 邊，也稱 AB 邊和 AC 邊為對稱邊。

對折後角 B 和角 C 完全重合，數學上稱角 B 的對稱角是角 C，角 C 的對稱角是角 B，也稱角 B 和角 C 為對稱角。

對折後 B 點和 C 點完全重合，數學上稱 B 點的對稱點是 C 點，C 點的對稱點是 B 點，也稱 B 點和 C 點為對稱點。



2. 國小階段線對稱圖形教學的重點不是「判斷給定的兩圖形是否對稱於 L」，下圖中的三角形甲和三角形乙是兩個不同的圖形，國小階段不討論兩個圖形是否為線對稱圖形。

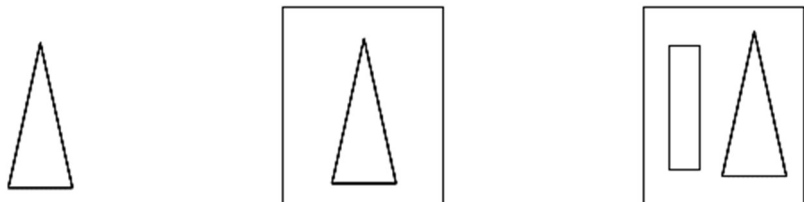


3. 以判斷等腰三角形是否為線對稱圖形問題為例，下面呈現三種布置圖形的方式：

第一種(下圖左)：給定一個等腰三角形的圖卡。

第二種(下圖中)：給定一張長方形紙張，將等腰三角形畫在給定長方形紙張的正中央。

第三種(下圖右)：給定一張長方形紙張，將等腰三角形畫在給定長方形紙張的一邊，另一邊可能還有其它的圖形。



第一種對摺的對象一定是這個等腰三角形的圖卡，學生可以透過對摺後圖形兩邊完全疊合的現象，判斷該等腰三角形是線對稱圖形。

第二種及第三種對摺的對象可能是等腰三角形，也可能是長方形，並將等腰三角形視為長方形紙張中的圖像。

建議教師先用第一種方式來布題，在與學生溝通評量對象是畫在紙上的等腰三角形後，才能用第二種及第三種方式來布題。

4. 部分學生在尋找線對稱圖形有幾條對稱軸時，常遺漏一些對稱軸，下面提出一種幫助學生能找出所有對稱軸的方法。

教師可以先拿出一些已畫出所有對稱軸的線對稱圖形，例如下圖中的七個線對稱圖形，要求學生將這些圖形，依對稱軸和對稱圖形交點間的關係進行分類，幫助學生將對稱圖形的對稱軸分成下列三類。

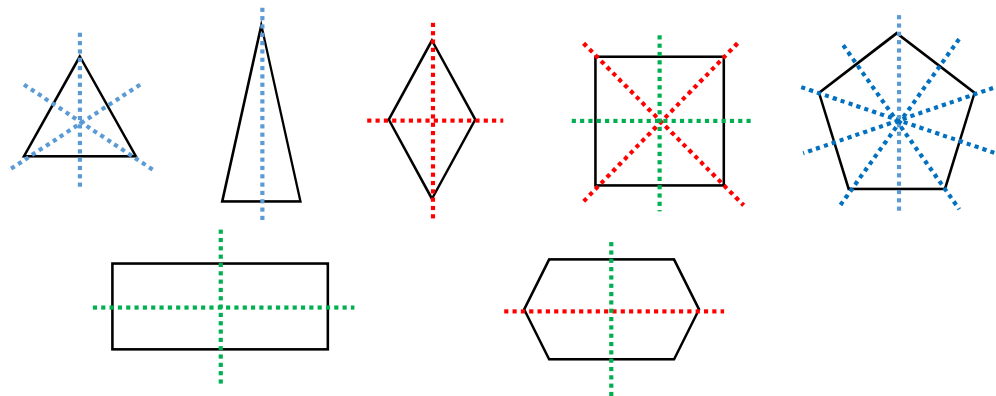
第一類：對稱軸通過對稱圖形的兩個頂點。

例如：菱形、正方形、六邊形。

第二類：對稱軸通過對稱圖形的一個頂點和一邊的中點。

第三類：對稱軸通過對稱圖形兩邊的中點。

當學生理解對稱軸和對稱圖形間只有這三類關係後，只要依這三類關係分別找出對稱軸，就不會遺漏。

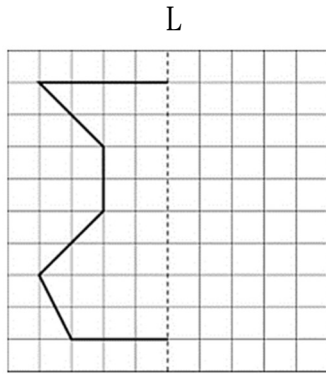


5. 國小線對稱圖形的教材中，都出現給定一條對稱軸及對稱軸某一邊的圖形，要求學生畫出另一邊圖形的問題，如下圖，L 是對稱軸，左邊是給定的圖形，要求學生畫出右邊的圖形。教師們常出現下列兩種不同解讀題意的的方法：

第一種：將左邊的圖形視為圖形甲，要求學生畫出圖形甲對 L 的對稱圖形乙。

第二種：將全部的圖形視為一個線對稱圖形，左邊的圖形只是線對稱圖形的一部分，要求學生畫出完整的線對稱圖形。

國小階段的教學重點不是第一種，國小階段的教學重點是第二種。



教師可以拿出一個線對稱圖形，要求學生觀察對稱圖形對稱點的連線和對稱軸的關係，幫助學生察覺對稱軸是這些對稱點連線的垂直平分線後，再要求學生自行畫出完整的線對稱圖形。

國小階段不宜引入垂直平分線的名詞，學生只要察覺對稱軸分別垂直於對應點的連線，且對應點到對應點連線和對稱軸交點的長度一樣長。

題號	試題代碼		答案				
3	112-M5-D2-03		1				
評量指標	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。						
知識向度	代數		認知向度		程序執行		
題目	算算看， $4568000 \div 125 \div 8 = ?$ ① 4568 ② 36544 ③ 45680 ④ 571000						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：71%
	全 體	0.71	0.14	0.11	0.04	0.00	
	高分組	0.94	0.04	0.02	0.00	0.00	鑑別度：0.54
	低分組	0.40	0.28	0.22	0.09	0.01	

## 一、試題分析

### (一) 評量目標

本題是大數連除兩數的計算題，要求學生選出正確的答案，評量學生利用「連除兩數相當於除此兩數之積」性質解題的能力。

### (二) 數據說明

1. 整體通過率 71%，高分組答對率 94%，低分組答對率 40%，鑑別度 0.54。
2. 71%的學生選擇正確答案①；14%的學生選擇②；11%的學生選擇③；4%的學生選擇④。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為0.54，正確答案為選項①，通過率為71%，顯示超過七成的學生已具備利用「連除兩數相當於除此兩數之積」性質解題的能力。
2. 有14%的學生選擇②(低分組有28%)，這些學生可能不具備利用「連除兩數相當於除此兩數之積」性質解題的能力，只算出大數出除以第一個數的答案。

3. 有11%的學生選擇③(低分組有22%)，這些學生可能已具備利用「連除兩數相當於除以此兩數之積」性質解題的能力，但在計算 $125 \times 8$ 時發生錯誤，因而產生 $4568000 \div 125 \div 8 = 4568000 \div 100$ 的錯誤。

4. 有4%的學生選擇④(低分組有9%)，這些學生可能不具備利用「連除兩數相當於除以此兩數之積」性質解題的能力，只算出大數除以第二個數的答案。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性(同 6-n-13)。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用「連除兩數相當於除以此兩數之積」性質解題的能力。
2. 低成就學生可能會在一步驟之後停止運算。
3. 學生沒有熟記 $\frac{1}{8} = 0.125$ ，或無法將 $\frac{1}{8} = 0.125$ 轉換為 $125 \times 8 = 1000$ 。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 現行教材在五年級引入「連除兩數相當於除以此兩數之積」，多以生活情境布題，透過兩種不同的列式方式進行解題，讓學生「發現」兩種列式皆可求出正確答案，因而「宣告」「連除兩數相當於除以此兩數之積」。但對學生來說，每個數學問題都是一個「特例」，學生必須看過、計算過、經驗夠多的特例後，才能發現這些特例當中的通則，形成概念的「集合」。但多數教材只布下一至二個問題後，便宣告這些性質，學生沒有足夠的先備知識、經驗協助他們理解時，就只能以背誦的方式將之強記，也因此容易遺忘、記錯、誤用。

2. 以「老師有 60 顆糖果，要分全班的小朋友，班級共有 6 組，每組 5 人，請問每個人可以分到幾顆糖果？」為例，說明如何幫助學生連除兩數相當於除此兩數之積。

教學時應出現下面兩種解題的方法，如果學生只出現其中一種解法，教師應提供另一種解法讓學生討論。

方法一：先算 60 顆糖果分給 6 組，再將每一組得到的糖果分給小組的 5 人

$$60 \div 6 \div 5 = 2。$$

方法二：先算全班有多少人，再算將 60 顆糖果平分，每人可以得到幾顆

$$60 \div (6 \times 5) = 2。$$

層次一：學生必須分別算出方法一的答案「 $60 \div 6 \div 5 = 2$ 」和方法二的答案

「 $60 \div (6 \times 5) = 2$ 」，發現這兩種方法算出的答案相同，才可以記成

$$「60 \div 6 \div 5 = 60 \div (6 \times 5)」。$$

層次二：學生知道它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期

它們的答案一定相同，可以記成「 $60 \div 6 \div 5 = 60 \div (6 \times 5)$ 」。

教師應提供多樣情境幫助層次一的學生提升至層次二。

3. 建議教師在進行此部分的教學時，應該要提供學生足夠多的解題經驗後，再協助學生整理、歸納出「連除兩數相當於除此兩數之積」的性質，協助他們能從「例題的特例」形成「概念的集合」。

4. 學生學完此單元後，解題時部分學生仍習慣不使用這些性質，還是可以正確。此時教師可以嘗試布下一些特殊數字、數字較大的題型，讓學生不得不使用，使之發現這些運算性質的確有其便利性，能增加計算的速度與正確性。

5. 除了解題外，教師也可引導學生擬題，透過雙向運思掌握「連除兩數相當於除此兩數之積」的意涵。

題號	試題代碼		答案				
4	112-M5-A1-04		3				
評量指標	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	<p>把一張長方形紙全部剪成一樣大的正方形，每個正方形的邊長都是整數公分，可以有很多不同的剪法。</p> <p>如果剪出的正方形邊長最長是 18 公分，其他剪法剪出的正方形邊長<u>不可能</u>是多少公分？</p> <p>① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：62%
	全 體	0.08	0.16	0.62	0.14	0.00	
	高分組	0.03	0.09	0.78	0.09	0.00	鑑別度：0.34
	低分組	0.15	0.21	0.45	0.19	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
<p>本題給定未知兩數的最大公因數，要求學生找出不是公因數的選項，評量學生利用「公因數是最大公因數的因數」性質解題的能力。</p>							
<b>(二) 數據說明</b>							
<p>1. 整體通過率 62%，高分組答對率 78%，低分組答對率 45%，鑑別度 0.34。</p> <p>2. 62%的學生選擇正確答案③；8%的學生選擇①；16%的學生選擇②；14%的學生選擇④。</p>							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
<p>1. 本題鑑別度為 0.34，正確答案為選項③，通過率為 62%，顯示超過六成的學生已具備利用「公因數是最大公因數的因數」性質解題的能力。</p> <p>2. 有 8%的學生選擇①(低分組有 15%)，這些學生可能尚未具備利用「公因數是最大公因數的因數」性質解題的能力；也可能誤解題意，選出可能的正方形邊長。</p>							

3. 有 16% 的學生選擇②(低分組有 21%)，這些學生可能尚未具備利用「公因數是最大公因數的因數」性質解題的能力；也可能誤解題意，選出可能的正方形邊長。
4. 有 14% 的學生選擇④(低分組有 19%)，這些學生可能尚未具備利用「公因數是最大公因數的因數」性質解題的能力；也可能誤解題意，選出可能的正方形邊長。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解。 (質數 < 20，質因數 < 20，被分解數 < 100)。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 本題給定未知兩數的最大公因數，因為兩數未知，如果學生不知道「公因數是最大公因數的因數」，可能無法成功解題。
2. 學生可能不知道「公因數是最大公因數的因數」，因為題目中只有 18 這一個數字，因此逐一判斷選項中的數字是否是 18 的因數來解題。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 以「求 18 和 24 的所有公因數」為例，有兩種解題的方法。

方法一：分別求出 18 和 24 的所有因數，再找出共同的因數 1、2、3、6，共同的因數為 18 和 24 的公因數。

方法二：先求出 18 所有的因數 1、2、3、6、9、18，再判斷這些數是否為 24 的因數。

1、2、3、6 是 18 的因數，也是 24 的因數，所以 1、2、3、6 是 18 和 24 的公因數。

教師應引入方法二，幫助學生簡化求公因數的解題過程。

2. 當學生求出 1、2、3、6 是 18 和 24 的公因數，6 是 18 和 24 的最大公因數後，教師應幫助學生認識公因數 1、2、3、6 是最大公因數 6 的因數，為六年級利用短除法解公因數的文字題鋪路。六年級利用短除法解題時，只能求出最大公因數，無法求出所有的公因數。

題號	試題代碼					答案	
5	112-M5-A1-05					2	
評量指標	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	<p>甲 = <math>9.98 \times 1.001</math>、乙 = <math>9.98 \times 0.9988</math>、丙 = <math>9.98 \times 1</math>。</p> <p>下列關於甲、乙、丙大小順序，何者正確？</p> <p>① 甲 &gt; 乙 &gt; 丙          ② 甲 &gt; 丙 &gt; 乙          ③ 乙 &gt; 丙 &gt; 甲          ④ 丙 &gt; 乙 &gt; 甲</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：77%
	全 體	0.07	0.77	0.06	0.10	0.00	
	高分組	0.01	0.96	0.01	0.02	0.00	鑑別度：0.49
	低分組	0.16	0.47	0.16	0.20	0.01	

## 一、試題分析

### (一) 評量目標

本題給定三個被乘數相同的小數乘法算式，要求學生判斷這三個算式積的大小順序，評量學生是否掌握乘數大於、小於或等於 1 時，積與被乘數的大小關係。

### (二) 數據說明

1. 整體通過率 77%，高分組答對率 96%，低分組答對率 47%，鑑別度 0.49。
2. 77%的學生選擇正確答案②；7%的學生選擇①；6%的學生選擇③；10%的學生選擇④。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為0.49，正確答案為選項②，通過率為77%，顯示近八成的學生已能掌握乘數大於、小於或等於1時，積與被乘數的大小關係。
2. 有 10%的學生選擇④(低分組有 20%)，這些學生可能尚未掌握乘數大於、小於或等於 1 時，積與被乘數的大小關係，誤以為乘以小數( $9.98 \times 1.001$ 、 $9.98 \times 0.9988$ )所得到的積，一定比乘以整數 1( $9.98 \times 1$ )所得到的積小；誤以為  $0.9988 > 1.001$ ， $9.98 \times 0.9988 > 9.98 \times 1.001$ ，得到  $9.98 \times 1 > 9.98 \times 0.9988 > 9.98 \times 1.001$  的答案。

3. 有 7% 的學生選擇①(低分組有 16%)，這些學生可能尚未掌握乘數大於、小於或等於 1 時，積與被乘數的大小關係，誤以為乘以多位小數( $9.98 \times 1.001$ 、 $9.98 \times 0.9988$ )所得到的積，一定比乘以整數 1( $9.98 \times 1$ )所得到的積大，得到  $9.98 \times 1.001 > 9.98 \times 0.9988 > 9.98 \times 1$  的答案。
4. 有 6% 的學生選擇③(低分組有 16%)，這些學生可能尚未掌握乘數大於、小於或等於 1 時，積與被乘數的大小關係，誤以為乘數越大，積越小；也可能誤以為  $0.9988 > 1 > 1.001$ ，因而得到  $9.98 \times 0.9988 > 9.98 \times 1 > 9.98 \times 1.001$  的答案。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。 5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能無法掌握乘數大於、小於或等於 1 時，積與被乘數的大小關係。
2. 學生可能誤以為被乘數相同時，乘數小數位數越多，其積越大。
3. 學生可能誤以為被乘數相同時，乘數越小時，其積越大。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 以二位小數乘以一位小數「 $2.38 \times 6.7$ 」為例，說明如何幫助學生理解小數乘以小數乘法直式計算的意義。  
 步驟一：複習整數乘以整數的乘法直式計算，學生能算出「 $238 \times 67 = 15946$ 」。

步驟二：複習分數乘以分數的分數乘法計算，學生能算出  $\frac{238}{100} \times \frac{67}{10} = \frac{238 \times 67}{100 \times 10}$

$$= \frac{15946}{1000}。$$

步驟三：幫助學生看到整數除以 10、100、1000、10000 等數時，被除數和商小數點位置移位的關係。

因為 15946 中沒有小數點，教師應先說明小數點可以告訴我們個位數字在哪裡，將「15946」改記成「15946.」後，再說明小數點移位的關係。

$$15946 \div 10 = 1594.6 \text{ (除以 10, 小數點向左移一位)}$$

$$15946 \div 100 = 159.46 \text{ (除以 100, 小數點向左移二位)}$$

$$15946 \div 1000 = 15.946 \text{ (除以 1000, 小數點向左移三位)}$$

$$15946 \div 10000 = 1.5946 \text{ (除以 10000, 小數點向左移四位)}$$

步驟四：透過比對小數乘以小數乘法直式算式和改記成分數乘以分數逐次減項的算式，幫助學生理解小數乘以小數乘法直式計算的意義。

$$2.38 \times 6.7$$

$$= \frac{238}{100} \times \frac{67}{10} \text{ (將小數} \times \text{小數, 改記成分數} \times \text{分數)}$$

$$= \frac{238 \times 67}{100 \times 10} \text{ (分數乘法算則: 分子乘以分子、分母乘以分母)}$$

$$= \frac{15946}{1000}$$

$$= 15946 \div 1000$$

$$= 15946. \div 1000 \text{ (在個位右邊加上小數點)}$$

$$= 15.946 \text{ (小數點往左移 3 位)}$$

步驟五：將步驟四的解題活動改記成直式。

列出直式		算出 238×67 的乘積		小數點往左移 3 位
$\begin{array}{r} 2.38 \\ \times 6.7 \\ \hline \end{array}$	⇒	$\begin{array}{r} 238 \\ \times 67 \\ \hline 1666 \\ 1428 \\ \hline 15946 \end{array}$	⇒	$\begin{array}{r} 2.38 \\ \times 6.7 \\ \hline 1666 \\ 1428 \\ \hline 15.946 \end{array}$

2. 當學生掌握小數乘以小數乘法直式算則解題的意義後，教師應幫助學生理解小數乘法中，積的小數位數 = 被乘數的小數位數 + 乘數的小數位數。

以「 $4.3 \times 1.5 = ?$ 」為例，「4.3」是一位小數，「1.5」也是一位小數，在計算一位小數乘以一位小數時，先算出「 $43 \times 15 = 645.$ 」，

再將乘積的小數點向左移 $(1 + 1)$ 位，也就是移 2 位，就能得到「 $4.3 \times 1.5 = 6.45$ 」。

再以「 $2.38 \times 1.6 = ?$ 」為例，「2.38」是二位小數，「1.6」是一位小數，計算二位小數乘以一位小數時，先算出「 $238 \times 16 = 3808.$ 」，再將乘積的小數點向左移 $(2 + 1)$ 位，也就是移 3 位，就能得到「 $2.38 \times 1.6 = 3.808$ 」。

題號	試題代碼					答案	
6	112-M5-B2-06					4	
評量指標	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。						
知識向度	量與實測		認知向度		程序執行		
題目	<p>姐姐播放的祈福音樂一段長 14 分鐘 31 秒鐘，她連續播放了 8 次才停止。請問姐姐共播放了多久的時間？</p> <p>① 1 小時 14 分鐘 48 秒鐘          ② 1 小時 16 分鐘 8 秒鐘          ③ 1 小時 54 分鐘 48 秒鐘          ④ 1 小時 56 分鐘 8 秒鐘</p>						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：64%
	全 體	0.12	0.11	0.14	0.64	0.00	
	高分組	0.02	0.03	0.05	0.89	0.00	鑑別度：0.56
	低分組	0.25	0.19	0.23	0.33	0.00	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題是複名數時間量的乘法文字題，要求學生算出答案，評量學生複名數時間量乘法計算解題的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 64%，高分組答對率 89%，低分組答對率 33%，鑑別度 0.56。							
2. 64%的學生選擇正確答案④；12%的學生選擇①；11%的學生選擇②；14%的學生選擇③。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.56，正確答案為選項④，通過率為64%，顯示超過六成的學生已具備複名數時間量乘法計算解題的能力。							
2. 有14%的學生選擇③(低分組有23%)，這些學生可能知道60分鐘=1小時，但誤以為100秒鐘=1分鐘，在進行複名數時間量直式乘法計算時，出現錯誤，如下所示：							

小時	分鐘	秒鐘
1	2	
	14	31
×		8
<span style="padding-right: 10px;">1</span> <span style="padding-right: 10px;"><del>114</del></span> <span><del>248</del></span>		
	54	48

3. 有12%的學生選擇①(低分組有25%)，這些學生可能誤以為100秒鐘=1分鐘、100分鐘=1小時，在進行複名數時間量直式乘法計算時，出現錯誤，如下所示：

小時	分鐘	秒鐘
1	2	
	14	31
×		8
<span style="padding-right: 10px;">1</span> <span style="padding-right: 10px;"><del>114</del></span> <span><del>248</del></span>		
	14	48

4. 有11%的學生選擇②(低分組有19%)，這些學生可能知道60秒鐘=1分鐘，但誤以為100分鐘=1小時，在進行複名數時間量直式乘法計算時，出現錯誤，如下所示：

小時	分鐘	秒鐘
1	4	
	14	31
×		8
<span style="padding-right: 10px;">1</span> <span style="padding-right: 10px;"><del>116</del></span> <span><del>248</del></span>		
	16	8

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題(不含除法)。	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備複名數時間量乘法計算解題的能力。

2. 學生可能不知道分鐘、秒鐘時間量複名數的乘法和二位乘以一位的乘法運算方式相同，滿足同構的關係。
3. 低分組學生混淆「1 分鐘 = 60 秒鐘」、「1 小時 = 60 分鐘」和十進位或百進位間的關係。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 學生在四年級應該已經能解決複名數時間量的加、減計算及複名數時間量整數倍的乘法計算(不進退位)。五年級開始引入可進退位時間量整數倍的乘法計算，以及等分除和包含除情境時間量的除法計算。
2. 以「小明每天長跑時間是 1 小時 30 分鐘，連續 7 天，共跑多少小時多少分鐘？」為例，說明如何幫助學生解題。

步驟一：先複習時間單位的化聚關係，1 小時 = 60 分鐘，60 分鐘 = 1 小時。

步驟二：溝通利用時間複名數乘法直式算則解題時，最後答案的分鐘數字不能比 60 大。

步驟三：利用直式算出答案 10 小時 30 分鐘。

小時	分鐘	
1	30	
×	7	
7	<del>210</del>	→ 分鐘的數字不能比60大
+	30	→ 210分鐘聚成3小時30分鐘
10	30	→ 答案是10小時30分鐘

題號	試題代碼					答案	
7	112-M5-D3-07					1	
評量指標	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。						
知識向度	代數		認知向度		解題思考		
題目	<p>已知「甲 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7」。</p> <p>請問「22.2 + 33.3 + 44.4 + 55.5 + 66.6 + 77.7」是甲的多少倍？</p> <p>① 11.1</p> <p>② 22.2</p> <p>③ 27</p> <p>④ 100</p>						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：59%
	全 體	0.59	0.09	0.19	0.12	0.00	
	高分組	0.85	0.03	0.07	0.05	0.00	鑑別度：0.54
	低分組	0.32	0.17	0.30	0.20	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
<p>本題給定六個連續整數相加的算式「<math>a+b+c+d+e+f</math>」及「<math>aa.a+bb.b+cc.c+dd.d+ee.e+ff.f</math>」，要求學生算出後者是前者的多少倍，評量學生是利用乘法對加法分配律簡化計算的能力。</p>							
<b>(二) 數據說明</b>							
<p>1. 整體通過率 59%，高分組答對率 85%，低分組答對率 32%，鑑別度 0.54。</p> <p>2. 59%的學生選擇正確答案①；9%的學生選擇②；19%的學生選擇③；12%的學生選擇④。</p>							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
<p>1. 本題鑑別度為0.54，正確答案為選項①，通過率為59%，顯示近六成的學生已具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力。</p> <p>2. 有9%的學生選擇②(低分組有17%)，這些學生可能不具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力。</p>							

3. 有19%的學生選擇③(低分組有30%)，這些學生可能不具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力；這些學生也可能不理解題意，算出六個連續整數的和為答案。
4. 有12%的學生選擇④(低分組有20%)，這些學生可能不具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力；這些學生也可能不理解題意，認為 $aa.a$ 是 $a$ 的100倍。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力。
2. 學生可能無法將 22.2 分解成 2 個十、2 個一和 2 個 0.1，透過「10 倍 + 1 倍 + 0.1 倍」的想法，得到 22.2 是 2 的 11.1 倍。
3. 學生可能沒有分解數字的能力，無法將 22.2 解讀為  $2 \times (11.1)$ ，將 33.3 解讀為  $3 \times (11.1)$ ，.....，因此無法利用乘法對加法分配律來簡化計算。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 國小代數運算引入的年級：
  - 一年級：加法交換律。
  - 二年級：加法結合律(三數相加，順序改變不影響其和)、乘法交換律。
  - 四年級：乘法結合律(三數相乘，順序改變不影響其積)。
  - 五年級：乘法對加法的分配律、乘法對減法的分配律。
2. 以「豆漿一杯 20 元，奶茶一瓶 40 元，媽媽各買了 6 杯，要付多少元？」為例，說明如何幫助學生理解乘法對加法的分配律。  
教學時應出現下面兩種解題的方法，如果學生只出現其中一種解法，教師應提供另一種解法讓學生討論。

方法一：分別計算 6 杯豆漿和 6 瓶奶茶的錢，再算合起來是多少錢。

$$20 \times 6 = 120, 40 \times 6 = 240, 120 + 240 = 360, \text{ 並改用併式 } 20 \times 6 + 40 \times 6 = 360 \text{ 來記錄。}$$

方法二：將 1 杯豆漿和 1 瓶奶茶看成 1 份，先算 1 份的錢，再算 6 份的錢。

$$20 + 40 = 60, 60 \times 6 = 360, \text{ 並改用併式 } (20 + 40) \times 6 = 360 \text{ 來記錄。}$$

理解乘法對加法的分配有兩個層次：

層次一：學生必須分別算出方法一的答案「 $20 \times 6 + 40 \times 6 = 360$ 」和方法二的答案「 $(20 + 40) \times 6 = 360$ 」，發現這兩種方法算出的答案相同，才可以記成「 $20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$ 」。

層次二：學生知道它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同，可以記成「 $20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$ 」

教師應幫助層次一的學生提升至層次二。

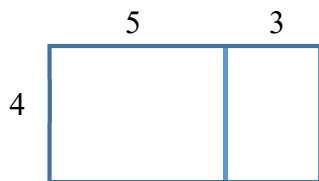
3. 可以透過面積模型幫助學生記憶乘法對加法分配律的意義，為國中利用長方形面積記憶乘法公式鋪路。

有兩種計算下列兩個長方形面積和的方法：

方法一： $5 \times 4 + 3 \times 4 = 32$

方法二： $(5 + 3) \times 4 = 32$

它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同，可以記成「 $5 \times 4 + 3 \times 4 = (5 + 3) \times 4$ 」。



4. 可以透過帶分數乘以帶分數的乘法計算，說明乘法對加法分配律的應用。

$$\begin{aligned} 2\frac{4}{7} \times 1\frac{3}{5} &= (2 + \frac{4}{7}) \times (1 + \frac{3}{5}) = (2 + \frac{4}{7}) \times 1 + (2 + \frac{4}{7}) \times \frac{3}{5} = 2 \times 1 + \frac{4}{7} \times 1 + 2 \times \frac{3}{5} \\ &+ \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = 2 + \frac{4}{7} + \frac{6}{5} + \frac{12}{35} = \frac{144}{35} \end{aligned}$$

5. 部分學生無法利用乘法對加法的分配律來簡化「 $35 \times 99 + 35$ 」的計算，下面提供三種解題的方法。

方法一：教師直接宣告將 35 改記成  $35 \times 1$

$$35 \times 99 + 35 = 35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times (99 + 1) = 35 \times 100 = 3500$$

部分教師習慣利用方法一來教學，學生不理解為何要將 35 改記成  $35 \times 1$ ，很快就會忘記。

方法二：給定「一枝筆賣 35 元，甲先買 99 枝，再買 1 枝，共花多少元？」的情境，再提供三種解法，幫助學生理解 35 是  $35 \times 1$  的省略記法。

(1)  $35 \times 99 + 35 \times 1$

(2)  $35 \times 99 + 35$

(3)  $35 \times (99 + 1)$

方法三：乘法對加法的分配律是兩種算法答案一定相等的關係，學生可能將乘法對加法的分配律解讀成運算。

學生比較熟悉  $35 \times (99 + 1) \Rightarrow 35 \times 99 + 35 \times 1$  的乘法運算，比較不熟悉  $35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times (99 + 1)$  提公因數的運算。

教師可以透過「 $35 \times (99 + 1) = 35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times 99 + 35$ 」，幫助學生理解 35 是  $35 \times 1$  的省略記法，必須將 35 改記成  $35 \times 1$ ，才能利用乘法對加法的分配律來解題。

題號	試題代碼					答案	
8	112-M5-A2-08					4	
評量指標	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。						
知識向度	數與計算		認知向度		程序執行		
題目	算算看，「 $820000 \div 8000$ 」的商及餘數分別是多少？ ① 商是 12 ，餘數是 4 ② 商是 12 ，餘數是 4000 ③ 商是 102 ，餘數是 4 ④ 商是 102 ，餘數是 4000						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：58%
	全 體	0.07	0.14	0.20	0.58	0.00	
	高分組	0.02	0.06	0.14	0.79	0.00	鑑別度：0.44
	低分組	0.15	0.24	0.25	0.35	0.00	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題是被除數和除數後面有多個 0 的計算題，要求學生算出商及餘數，評量學生除法直式計算的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 58%，高分組答對率 79%，低分組答對率 35%，鑑別度 0.44。							
2. 58%的學生選擇正確答案④；7%的學生選擇①；14%的學生選擇②；20%的學生選擇③。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.44，正確答案為選項④，通過率為58%，顯示近六成的學生已具備除法直式計算的能力。							
2. 有20%的學生選擇③(低分組有25%)，這些學生可能尚未具備除法直式計算的能力。這些學生在除法直式計算的過程中，透過「被除數和除數同時換單位」方法來解題，但餘數忘了換回原單位，如下所示：							

$$\begin{array}{r}
 102 \\
 8000 \overline{) 8200000} \\
 \underline{8} \phantom{0000} \\
 20 \\
 \underline{16} \\
 4
 \end{array}$$

3. 有14%的學生選擇②(低分組有24%)，這些學生可能尚未具備除法計算的能力。這些學生在除法直式計算的過程中，漏記商十位數0，得到商數為12，如下所示：

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 8000 \overline{) 8200000} \\
 \underline{8000} \\
 2000 \\
 \underline{1600} \\
 4000
 \end{array}$$

4. 有7%的學生選擇①(低分組有15%)，這些學生可能尚未具備除法計算的能力。這些學生在除法直式計算的過程中，透過「被除數和除數同時換單位」方法來解題，但漏記商十位數0，餘數也忘了換回原單位，如下所示：

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 8000 \overline{) 8200000} \\
 \underline{8} \phantom{0000} \\
 20 \\
 \underline{16} \\
 4
 \end{array}$$

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生在做多位數除法問題時，常常會在不夠除時，商忘了補 0，而繼續往下算。
2. 學生不理解被除數和除數同時換單位的解題方法，不知道將  $820000 \div 8000$  轉換成  $820 \div 8$ ，指的是將被除數 820000 和除數 8000 同時轉換成以 1000 為單位，因此  $820 \div 8$  的餘數 4 指的是 4 個 1000，也就是 4000。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 二位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為二位數乘法直式計算的基礎，也是除數為二位數除法直式計算的基礎。  
三位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為三位數乘法直式計算的基礎，也是除數為三位數除法直式計算的基礎。  
四位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為四位數乘法直式計算的基礎，也是除數為四位數除法直式計算的基礎。  
以  $345 \times 678$  為例，直式進行的是 3 次 345 乘以一位數 6、7、8 的計算；以  $4613 \div 172$  為例，學生估商時進行的是 2 次 172 乘以一位數的計算。  
教師應要求學生在三年級熟練二位及三位數乘以一位數的乘法直式計算，並將計算的結果記成一行。
2. 以「 $6000 \div 700 = ( ) \dots ( )$ 」為例，說明如何幫助學生解題。
  - (1) 先布問題「60 張百元鈔票，每人分 7 張，最多可以分給多少人？還剩下幾張百元鈔票？也就是多少元？」。  
學生可以利用「 $60 \div 7 = 8 \dots 4$ 」，得到可以分給 8 人，還剩下 4 張百元鈔票，也就是 400 元的答案。
  - (2) 再布問題「6000 元，每人分 700 元，最多可以分給多少人？還剩下多少元？」  
限制學生必須將 6000 元和 700 元都換成 100 元鈔票後再計算，  
學生將 6000 元換成 60 張 100 元，將 700 元換成 7 張 100 元，透過「 $60 \div 7 = 8 \dots 4$ 」，算出可以分給 8 人，還剩下 4 張百元鈔票，也就是 400 元的答案。  
教師可以說明此方法是將被除數和除數同時換成以 100 為單位的算法。



題號	試題代碼		答案				
9	112-M5-A3-09		4				
評量指標	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。						
知識向度	數與計算	認知向度	解題思考				
題目	請問 $\frac{3}{6}$ 、 $\frac{4}{9}$ 、 $\frac{6}{11}$ 三個分數中，最大分數和最小分數的和是多少？ ① $\frac{9}{17}$ ② $\frac{17}{18}$ ③ $\frac{69}{66}$ ④ $\frac{98}{99}$						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：32%
	全 體	0.17	0.18	0.32	0.32	0.01	
	高分組	0.07	0.10	0.24	0.57	0.01	鑑別度：0.40
	低分組	0.24	0.25	0.33	0.17	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題給定三個分數，要求學生找出最大分數和最小分數的和，評量學生異分母分數大小比較與加減法解題的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 32%，高分組答對率 57%，低分組答對率 17%，鑑別度 0.40。							
2. 32%的學生選擇正確答案④；17%的學生選擇①；18%的學生選擇②；32%的學生選擇③。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.40，正確答案為選項④，通過率為32%，顯示超過三成的學生已具備異分母分數大小比較與加減法解題的能力。							

2. 有32%的學生選擇③(低分組有33%)，這些學生可能不具備異分母分數大小比較的能力，但是具備利用異分母加減法解題的能力，他們錯誤的判定 $\frac{3}{6}$ 為最小，但

$$\text{是正確算出 } \frac{3}{6} + \frac{6}{11} = \frac{69}{66}。$$

3. 有18%的學生選擇②(低分組有25%)，這些學生可能不具備異分母分數大小比較的能力，但是具備利用異分母加減法解題的能力，他們錯誤的判定 $\frac{3}{6}$ 為最大，但

$$\text{是正確算出 } \frac{4}{9} + \frac{3}{6} = \frac{17}{18}。$$

4. 有17%的學生選擇①(低分組有24%)，這些學生可能不具備異分母分數大小比較與加減法解題的能力，他們錯誤的判定 $\frac{3}{6}$ 為最小，且在計算兩數和時發生分子加

$$\text{分子、分母加分母的錯誤， } \frac{3}{6} + \frac{6}{11} = \frac{9}{17}，\text{得到答案 } \frac{9}{17}。$$

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 本題給定 $\frac{3}{6}$ 、 $\frac{4}{9}$ 、 $\frac{6}{11}$ 這三個分數中， $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ ， $\frac{6}{11} > \frac{1}{2}$ ，學生可能無法察覺上面的關係，將三個分數通分後再比較，或是兩兩通分進行大小比較，因為計算比較繁雜而發生錯誤。

2. 學生可能不具備異分母分數大小比較與加減法解題的能力。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 以「 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{2}{3}$ ，哪一個分數最大？」為例，說明如何幫助學生解異分母分數的大小比較問題。

(1) 透過等值分數解題：

$$\frac{1}{6} \text{ 的等值分數：} \frac{1}{6}、\frac{2}{12}、\frac{3}{18}、\frac{4}{24}、\frac{5}{30}、\frac{6}{36}、\frac{7}{42}、\frac{8}{48}、\frac{9}{54}、\dots$$

$$\frac{3}{8} \text{ 的等值分數：} \frac{3}{8}、\frac{6}{16}、\frac{9}{24}、\frac{12}{32}、\frac{15}{40}、\frac{18}{48}、\frac{21}{56}、\frac{24}{64}、\frac{27}{72}、\dots$$

$$\frac{2}{3} \text{ 的等值分數：} \frac{2}{3}、\frac{4}{6}、\frac{6}{9}、\frac{8}{12}、\frac{10}{15}、\frac{12}{18}、\frac{14}{21}、\frac{16}{24}、\frac{18}{27}、\frac{20}{30}、\frac{22}{33}、\frac{24}{36}、\frac{26}{39}、\frac{28}{42}、\frac{30}{45}、\frac{32}{48}、\dots$$

$$\frac{1}{6} = \frac{4}{24} = \frac{8}{48}, \quad \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{18}{48}, \quad \frac{2}{3} = \frac{16}{24} = \frac{32}{48}$$

$$\frac{16}{24} > \frac{9}{24} > \frac{4}{24}, \quad \text{或} \quad \frac{32}{48} > \frac{18}{48} > \frac{8}{48}, \quad \text{所以} \frac{2}{3} \text{ 最大。}$$

(2) 透過以三分數分母的公倍數為公分母解題

$$\frac{1}{6} \text{ 等值分數的分母：} 6、12、18、24、30、36、42、48、54、\dots$$

$$\frac{3}{8} \text{ 等值分數的分母：} 8、16、24、32、40、48、56、64、72、\dots$$

$$\frac{2}{3} \text{ 等值分數的分母：} 3、6、9、12、15、18、21、24、27、30、33、36、39、42、48、\dots$$

$$\frac{1}{6} = \frac{(4)}{24}, \quad \frac{3}{8} = \frac{(9)}{24}, \quad \frac{2}{3} = \frac{(16)}{24}$$

$$\frac{16}{24} > \frac{9}{24} > \frac{4}{24}, \quad \text{所以} \frac{2}{3} \text{ 最大。}$$

2. 以「 $\frac{3}{8}$ 盒和 $\frac{1}{6}$ 盒合起來有多少盒？」為例，異分母分數的單位都是「盒」，這兩個異分母分數的單位相同，因此可以相加，數學上約定相同單位的數字加減後的答案必須是一個數字。

要讓 $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$ 的和是1個數字，必須要找一個比較小的**共測單位**，例如 $\frac{1}{24}$ ，讓異

分母分數 $\frac{3}{8}$ 和 $\frac{1}{6}$ 都變成 $\frac{1}{24}$ 的整數倍， $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ ，也就是9個 $\frac{1}{24}$ ， $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ ，也

就是4個 $\frac{1}{24}$ ，9個 $\frac{1}{24}$ 和4個 $\frac{1}{24}$ 合起來是13個 $\frac{1}{24}$ ，就能用一個數字 $\frac{13}{24}$ 來描

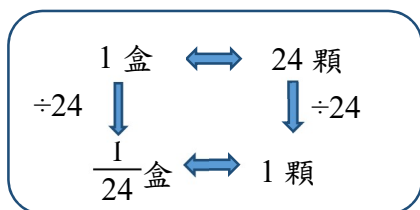
述 $\frac{3}{8}$ 與 $\frac{1}{6}$ 的和，記成 $\frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{13}{24}$ 。

3. 以「1盒蘋果有24顆， $\frac{3}{8}$ 盒和 $\frac{1}{6}$ 盒合起來有多少盒？」為例，如果學生通分還不熟練，教師也可以提供1盒蘋果的顆數，幫助學生利用整數的乘、除法來解決問題。

$24 \div 8 = 3$ ， $3 \times 3 = 9$ ，得到 $\frac{3}{8}$ 盒有9顆。

$24 \div 6 = 4$ ， $4 \times 1 = 4$ ，得到 $\frac{1}{6}$ 盒有4顆。

$9 + 4 = 13$ ，得到 $\frac{3}{8}$ 盒和 $\frac{1}{6}$ 盒合起來13顆。



由上圖可以知道1顆是 $\frac{1}{24}$ 盒，得到13顆是 $\frac{13}{24}$ 盒。

題號	試題代碼		答案				
10	112-M5-A1-10		2				
評量指標	4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
題目	<p>小數部分有兩個數字的小數稱為二位小數，例如：2.36、18.03、235.47 都是二位小數。</p> <p>弟弟用四張數字卡 <b>3</b>、<b>5</b>、<b>6</b>、<b>9</b> 排出最大的二位小數，請問十分位應該放哪張數字卡？</p> <p>① 3 ② 5 ③ 6 ④ 9</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：43%
	全 體	0.12	0.43	0.21	0.25	0.00	
	高分組	0.08	0.68	0.11	0.12	0.00	鑑別度：0.47
	低分組	0.15	0.21	0.29	0.35	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題給定 4 張數字卡，要求學生選出排出最大二位小數時的十分位數字，評量學生認識二位小數及二位小數大小比較的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 43%，高分組答對率 68%，低分組答對率 21%，鑑別度 0.47。							
2. 43%的學生選擇正確答案②；12%的學生選擇①；21%的學生選擇③；25%的學生選擇④。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.47，正確答案為選項②，通過率為43%，顯示超過四成的學生已認識二位小數並具備二位小數大小比較的能力。							

2. 有12%的學生選擇①(低分組有15%)，這些學生可能不具備二位小數大小比較的能力；也可能學生已具備二位小數大小比較的能力，正確找出最大的二位小數，但是誤將百分位看成十分位。
3. 有21%的學生選擇③(低分組有29%)，這些學生可能不認識二位小數，或不具備二位小數大小比較的能力。
4. 有25%的學生選擇④(低分組有35%)，這些學生可能不認識二位小數，或不具備二位小數大小比較的能力。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。	4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不認識二位小數。
2. 學生可能不具備二位小數大小比較的能力，無法找出最大的二位小數。
3. 學生可能混淆個位、十分位和百分位的意義，將百分位看成十分位。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 小數是整數十進位系統的延伸，在引入一位小數時，十分位的值必須是個位的 $\frac{1}{10}$ 倍，因此規定「 $0.1 = \frac{1}{10}$ 」。在引入二位小數時，百分位的值必須是個位的 $\frac{1}{100}$ 倍，因此規定「 $0.01 = \frac{1}{100}$ 」。百分位位名的由來是「 $\frac{1}{100} = 0.01$ 」的關係。

2. 報讀小數時，整數部分和小數部分報讀的方式不一樣。例如：將「2345.2345」讀作「二千三百四十五點二三四五」。

在報讀整數部分時，會將每一個數字的位名都唸出來。但是在報讀小數部分時，只唸出數字，並沒有唸出位名。例如：0.23 讀成「零點二三」，不能讀成「零點二十三」。

3. 透過下列兩組數字，說明小數點的功能。

第一組小數：7.7、77.77、777.777

第二組小數：77.7、777.77、7777.777

就數字本身視覺的觀點，7.7 小數點的左邊及右邊各有一個 7，77.77 小數點的左邊及右邊各有二個 7，777.777 小數點的左邊及右邊各有三個 7，因此以小數點為對稱中心時，第一組小數是左右對稱的。

但是就位值的觀點，第二組小數才是左右對稱的。當我們以個位的 7 為對稱中心，並忽略小數點時，左右兩邊的位值是對稱的，個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，十位的左邊是百位，十分位的右邊是百分位，百位的左邊是千位，百分位的右邊是千分位，十位及十分位，百位及百分位，千位及千分位分別對稱於個位。如下所示：

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
		7	7.	7		
	7	7	7.	7	7	
7	7	7	7.	7	7	7

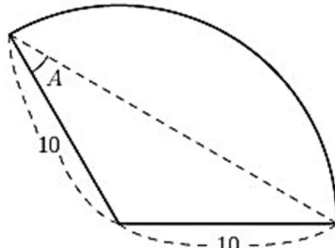
因為數字的單位是 1，而記幾個 1 的位置是個位，因此個位才是數字的對稱中心。個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，不會有個分位的位名，而小數點的功能是告訴我們個位在哪裡。

4. 教師常要求學生將計算後的結果 3.0 改記成 3，2.30 改記成 2.3，可以這樣記的原因是 3.0 和 3 等值，2.30 和 2.3 等值，而 3 和 2.3 是最簡小數的概念。

六年級引入最簡分數後，我們會要求分數問題最後的答案要用最簡分數來表示，相同的理由，我們也希望小數問題最後的答案要用最簡小數來表示。

四年級學生將計算後的結果記成 3.0 或 2.30，教師應先接受，再幫助學生改記成 3 或 2.3。

5. 由於小數和連續量的測量情境常一起出現，小數的學習應與量的教材結合，應多學習「樓高 3.25 公尺」、「兩地距離 24.56 公里」、「箱子重 5.32 公斤」等用法，而且小數的加減問題也應儘量與測量結合。
6. 以二位純小數 0.85 為例，進行位值單位的換算，指的是能將「85 個 0.01」聚成「8 個 0.1、5 個 0.01」，以及將「8 個 0.1、5 個 0.01」化成「85 個 0.01」的雙向化聚。也就是說，0.85 由 85 個 0.01 所組成，也由 8 個 0.1 及 5 個 0.01 所組成。

題號	試題代碼		答案				
11	112-M5-C3-11		2				
評量指標	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。						
知識向度	幾何	認知向度	解題思考				
題目	<p>下圖是一個 <math>\frac{1}{3}</math> 圓的扇形，請問角 <math>A</math> 是多少度？</p>  <p>(單位：公分)</p> <p>① 20 ② 30 ③ 60 ④ 120</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：50%
	全 體	0.25	0.50	0.15	0.09	0.00	
	高分組	0.10	0.79	0.08	0.04	0.00	鑑別度：0.53
	低分組	0.39	0.26	0.21	0.15	0.00	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題給定標示半徑的扇形圖像，要求學生算出給定角的角度，評量學生利用圓心角與三角形內角和為 180 度性質解題的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 50%，高分組答對率 79%，低分組答對率 26%，鑑別度 0.53。							
2. 50%的學生選擇正確答案②；25%的學生選擇①；15%的學生選擇③；9%的學生選擇④。							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項②，通過率為50%，顯示五成的學生已具備利用圓心角與三角形內角和為180度性質解題的能力。
2. 有25%的學生選擇①(低分組有39%)，這些學生可能尚未具備利用圓心角與三角形內角和為180度性質解題的能力，以直觀的方式判斷指定角的大小，因而選擇20度為答案；或是將圖中兩半徑長度相加，得到20這個答案。
3. 有15%的學生選擇③(低分組有21%)，這些學生可能尚未具備利用圓心角與三角形內角和為180度性質解題的能力；這些學生可能已具備求圓心角度數的能力，也掌握三角形內角和為180度的性質，但是誤解題意，求出扇形內等腰三角形兩底角的度數和60度當作答案。
4. 有9%的學生選擇④(低分組有15%)，這些學生可能已具備求圓心角度數的能力，但誤解題意，求出圓心角的角度120度當作答案。

### 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-04 能認識角度單位「度」， 並使用量角器實測角度 或畫出指定的角度。	5-s-03 能認識圓心角，並認 識扇形。	6-s-03 能理解圓面積與圓周 長的公式，並計算簡 單扇形的面積。

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未具備利用圓心角與三角形內角和為180度性質解題的能力。
2. 學生可能不認識周角，不知道周角為360度。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 學生在三年級應該已經認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。而五年級的教學重點是認識扇形及圓心角。

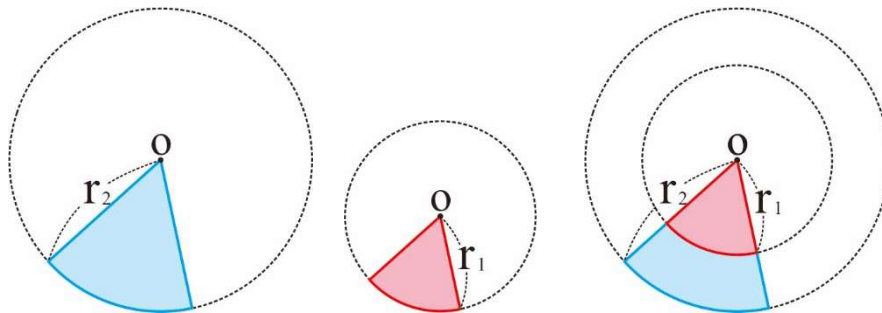
2. 圓的圓心角是周角，周角的角度是 360 度，而扇形的圓心角是周角的部分， $\frac{1}{2}$ 圓

的圓心角是周角的 $\frac{1}{2}$ ，可以利用  $360 \times \frac{1}{2} = 180$ (度)，算出 $\frac{1}{2}$ 圓的圓心角是 180

度。相同的方式，可以透過  $360 \times \frac{1}{n}$ ，算出 $\frac{1}{n}$ 圓的圓心角是多少度。

3. 部分學生誤認為半徑比較長的 $\frac{1}{n}$ 圓，它的圓心角比較大，半徑比較短的 $\frac{1}{n}$ 圓，它

的圓心角比較小。教師可以透過下圖，幫助學生理解，半徑比較長的 $\frac{1}{6}$ 圓，扇形面積比較大，圓心角對應的圓弧比較長，但是它們的圓心角都是 60 度，都一樣大。

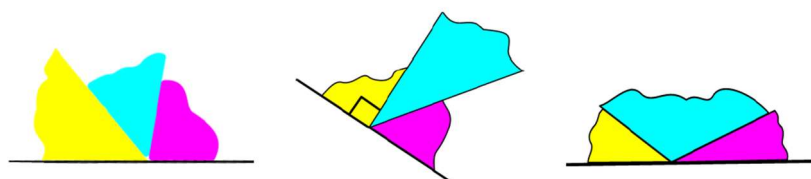


4. 下面提供三種幫助學生理解三角形的內角和是 180 度的方法：

方法一：拿出或畫出很多不同的三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生測量出這些三角形的所有角，再分別算出這些三角形三個角的和。幫助學生察覺所有三角形三個角的角度和大約都是180度。

方法二：拿出一些三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生剪下三角形的3個角，再將同一個三角形的3個角拼湊在一起，幫助學生察覺所有三角形的三個角都可以拼成一個平角，這些三角形3個角的角度和大約都是180度。

方法三：教師也可以只剪下兩個角，再和沒有剪下的那個角拼湊在一起，也能夠拼出一個平角，得到三角形3個角的角度和大約都是180度。



5. 所有的三角形都滿足內角和是 180 度的性質，教師不宜只求出某一個三角形的內角和是 180 度，就說明所有三角形的內角和都是 180 度。教師應幫助學生認識，直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形的內角和都是 180 度。

題號	試題代碼					答案	
12	112-M5-B3-12					3	
評量指標	4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。						
知識向度	量與實測		認知向度		解題思考		
題目	<p>妹妹下午 9 時 15 分上床睡覺，一直睡到隔天上午 6 時 55 分起床。請問妹妹睡了多久？</p> <p>① 2 小時 20 分鐘</p> <p>② 9 小時</p> <p>③ 9 小時 40 分鐘</p> <p>④ 16 小時 10 分鐘</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：66%
	全 體	0.14	0.08	0.66	0.12	0.00	
	高分組	0.04	0.03	0.90	0.03	0.00	鑑別度：0.49
	低分組	0.24	0.14	0.40	0.21	0.00	
<p><b>一、試題分析</b></p> <p>(一) 評量目標</p> <p>本題給定今天和明天的時刻，要求學生算出兩時刻間經過多少時間，評量學生跨日時間和時刻加減計算的能力。</p> <p>(二) 數據說明</p> <p>1. 整體通過率 66%，高分組答對率 90%，低分組答對率 40%，鑑別度 0.49。</p> <p>2. 66%的學生選擇正確答案③；14%的學生選擇①；8%的學生選擇②；12%的學生選擇④。</p> <p>(三) 選項及學生表現說明</p> <p>1. 本題鑑別度為0.49，正確答案為選項③，通過率為66%，顯示近七成的學生已具備跨日時間和時刻加減計算的能力。</p> <p>2. 有14%的學生選擇①(低分組有24%)，這些學生可能不具備跨日時間和時刻加減計算的能力，直接將兩個時刻相減得出答案。</p>							

3. 有8%的學生選擇②(低分組有14%)，這些學生可能不具備跨日時間和時刻加減計算的能力，他們只算出今天下午9時睡到隔天的6時，大約睡了9小時。

4. 有 12%的學生選擇④(低分組有 21%)，這些學生可能不具備跨日時間和時刻加減計算的能力，直接將兩個時刻相加得出答案。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-13 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算(不進、退位)。	4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 這些學生可能不具備跨日時間和時刻加減計算的能力。
2. 學生可能無法畫出時間數線，或無法將時刻轉換為時間。
3. 學生可能不理解題意，直接將題目中給定的時刻相加或相減。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

本題主要在於解決跨日的時間計算問題，過程中也涉及到時間的換算。相關系列教學參考如下：

#### 1. 時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」的計算：

三年級：只處理同單位加減及不進退位的複名數時間量加減問題。

四年級：處理進退位的複名數時間量加減問題。

#### 2. 四年級時間的加減包含下列類型，都可以進退位：

##### (1) 時間量的加減：

例如：「3小時50分鐘和2小時30分鐘合起來是多少小時多少分鐘？」。

(2) 時刻及時間的加減：

a. 兩時刻間經過多少時間：

上午 3 時 45 分到下午 7 時 18 分經過多少小時多少分鐘？

b. 甲時刻經過某時間量後是什麼時刻：

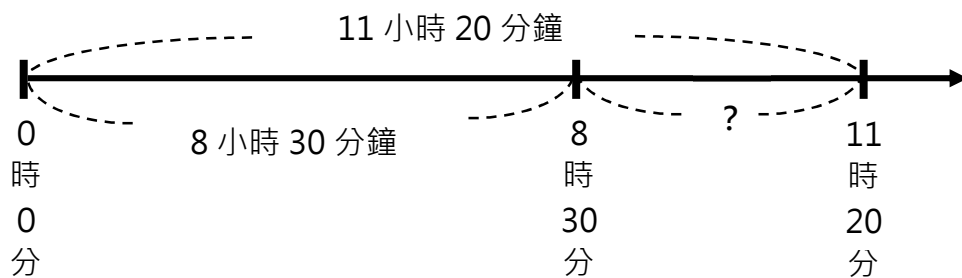
現在是 3 時 25 分，經過 5 小時 47 分鐘後是幾時幾分？

c. 甲時刻在某時間量之前是什麼時刻：

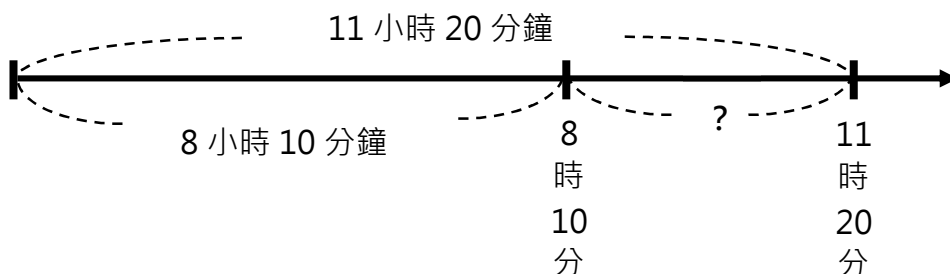
現在是下午 3 時 25 分，5 小時 47 分鐘前是上午幾時幾分？

3. 教師可透過時間數線，幫助學生利用加減算式解決時刻及時間的加減問題。

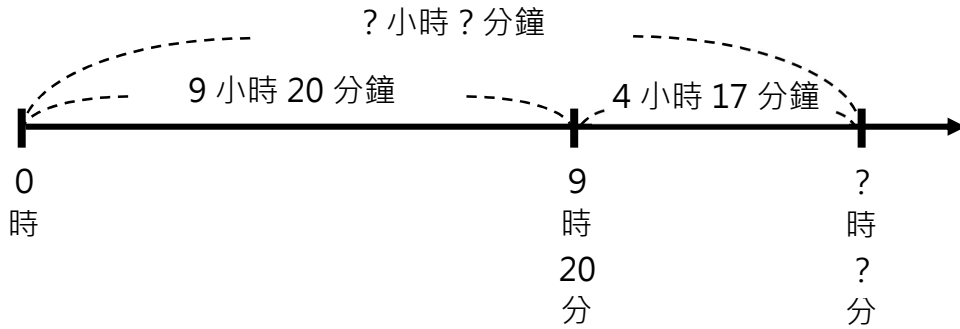
以「上午 8 時 30 分到上午 11 時 20 分，經過幾小時幾分鐘？」為例，可以透過時間數線，將「上午 8 時 30 分」解讀為和上午 0 時 0 分的距離是「8 小時 30 分鐘」，將「上午 11 時 20 分」解讀為和上午 0 時 0 分的距離是「11 小時 20 分鐘」，利用「11 小時 20 分鐘 - 8 小時 30 分鐘 = 2 小時 50 分鐘」，就能得到經過 2 小時 50 分鐘的答案。



4. 教師透過時間數線進行教學時，應清楚標示時間量或時刻的用語。以下圖為例，時間數線上刻度標示的是時刻「8 時 10 分」及「11 時 20 分」，距離標示的是時間量「8 小時 10 分鐘」及「11 小時 20 分鐘」。將兩時間量相減可以算出 8 時 10 分到 11 時 20 分經過 3 小時 10 分鐘。

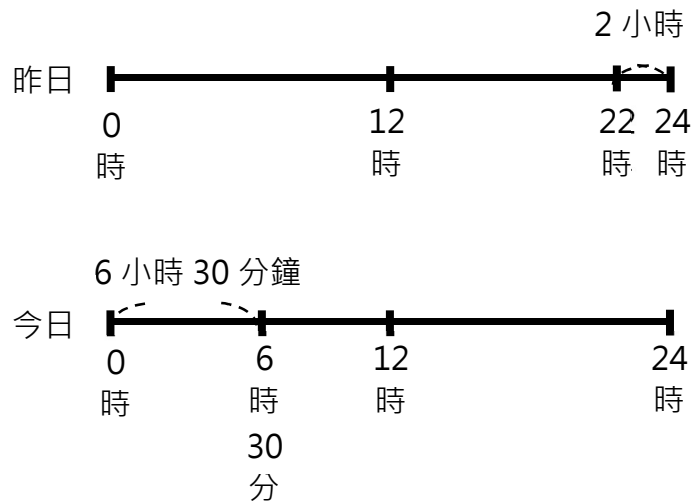


5. 以「一部電影片長 4 小時 17 分鐘，從上午 9 時 20 分開始播放，電影結束是幾時幾分？(用 12 時制表示)」為例，可以透過時間數線，將「上午 9 時 20 分」解讀為和上午 0 時 0 分的距離是「9 小時 20 分鐘」，利用「9 小時 20 分鐘 + 4 小時 17 分鐘 = 13 小時 37 分鐘」，算出結束的時間是「13 時 37 分」。13 時 37 分就是下午 1 時 37 分。



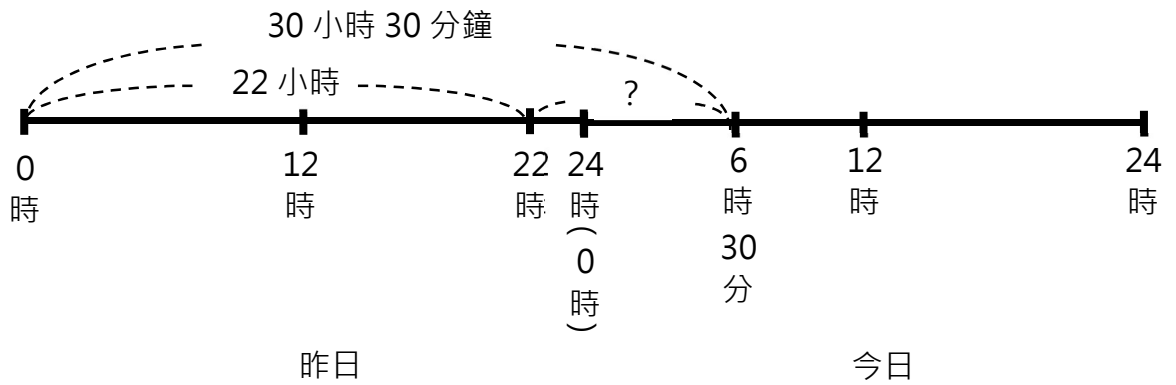
6. 以「哥哥昨天下午 10 時上床睡覺，今天上午 6 時 30 分起床，他總共睡了幾小時幾分鐘？」為例，教師透過時間數線進行跨日時間教學時，宜先畫出兩日的兩條時間數線幫助學生解題，解題成功後再將兩日的時間數線合併。

方法一：畫出兩日的時間數線解題



下午 10 時改記成 24 時制是 22 時， $24 - 22 = 2$ ，表示昨日睡了 2 小時。6 時 30 分到 0 時的距離是 6 小時 30 分鐘，表示今日睡了 6 小時 30 分鐘， $2 小時 + 6 小時 30 分鐘 = 8 小時 30 分鐘$ ，表示哥哥從昨日下午 10 時到今日上午 6 時 30 分，共睡了 8 小時 30 分鐘。

方法二：連接兩日時間數線解題



下午 10 時改記成 24 時制是 22 時，0 時到 22 時的距離是 22 小時。24 小時 + 6 小時 30 分鐘 = 30 小時 30 分鐘，表示昨日 0 時到今日 6 時 30 分的距離是 30 小時 30 分鐘。30 小時 30 分鐘 - 22 小時 = 8 小時 30 分鐘，表示哥哥從昨日下午 10 時到今日上午 6 時 30 分，共睡了 8 小時 30 分鐘。

題號	試題代碼					答案	
13	112-M5-C3-13					1	
評量指標	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。 (同 5-n-18)						
知識向度	幾何		認知向度		解題思考		
題目	<p>平行四邊形乙和平行四邊形丙都不是長方形。  長方形甲的長是 18 公分、寬是 12 公分；  平行四邊形乙的底邊是 18 公分、高是 12 公分；  平行四邊形丙的底邊是 18 公分、鄰邊是 12 公分；  下列關於甲、乙、丙三個圖形面積大小順序的描述，何者正確？</p> <p>① 甲 = 乙，乙 &gt; 丙  ② 甲 = 乙，乙 &lt; 丙  ③ 甲 &gt; 乙，乙 &gt; 丙  ④ 甲 &gt; 乙，乙 = 丙</p>						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：39%
	全 體	0.39	0.23	0.15	0.22	0.01	
	高分組	0.67	0.15	0.06	0.12	0.00	鑑別度：0.49
	低分組	0.18	0.29	0.25	0.27	0.01	
<b>一、試題分析</b> <b>(一) 評量目標</b> 本題給定長方形的長和寬以及兩個不是長方形的平行四邊形的底邊、鄰邊和高，要求學生比較 3 個四邊形面積的大小，評量學生利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力。 <b>(二) 數據說明</b> 1. 整體通過率 39%，高分組答對率 67%，低分組答對率 18%，鑑別度 0.49。 2. 39%的學生選擇正確答案①；23%的學生選擇②；15%的學生選擇③；22%的學生選擇④。							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.49，正確答案為選項①，通過率為 39%，顯示近四成的學生已具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力。
2. 有 23%的學生選擇②(低分組有 29%)，這些學生可能已具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力，但是不理解兩平行線間的垂線最短，也就是平行四邊形乙的高和平行四邊形丙的鄰邊一樣長時，平行四邊形丙的高比平行四邊形乙的高短，因此誤判乙 < 丙。
3. 有 15%的學生選擇③(低分組有 25%)，這些學生可能尚未具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力，誤認為甲 > 乙。
4. 有 22%的學生選擇④(低分組有 27%)，這些學生可能尚未具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力，誤認為甲 > 乙；這些學生可能不理解兩平行線間的垂線最短，也就是平行四邊形乙的高和平行四邊形丙的鄰邊一樣長時，平行四邊形丙的高比平行四邊形乙的高短，因此誤判乙 = 丙。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-1 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-s-09) 4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-n-18)	6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不理解兩平行線間的垂線最短，也就是平行四邊形乙的高和平行四邊形丙的鄰邊一樣長時，平行四邊形丙的高比平行四邊形乙的高短。
2. 學生可能不具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力。

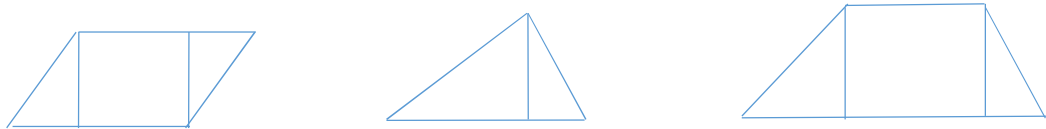
## (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師先透過將平行四邊形切割再重組成長方形的方式，引入平行四邊形的面積公式。再透過將兩個三角形拼成平行四邊形，以及將兩個梯形拼成平行四邊形的方式，引入三角形及梯形面積公式。

這種引入三角形、平行四邊形與梯形面積公式的方法，其優點是只要操弄圖形就能導出公式，不涉及代數式的運算，缺點是解法不自然，學生無法自發性的解題，必須透過教師的引導才能導出公式。

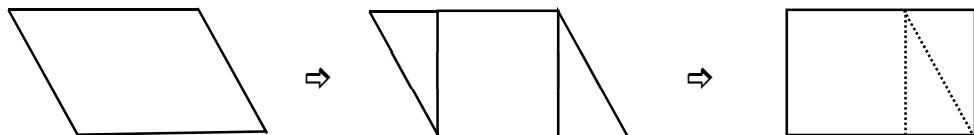
2. 學生已學過長方形面積公式，也知道沿著長方形的對角線剪開，會剪出兩個全等的直角三角形，因此剪成的直角三角形面積是長方形面積的一半。

如下圖，教師不宜將三角形、平行四邊形與梯形分別切割成長方形和直角三角形，再將它們面積相加的方式，引入面積公式，這種方法雖然能算出三角形、平行四邊形與梯形的面積，但是五年級學生不易將這些算式併式後引入公式。



3. 下面概略說明如何引入平行四邊形、三角形的面積公式

- (1) 將平行四邊形先切割再重組(如下圖)，將平行四邊形轉換成等積異形的長方形，其中長方形的長邊就是平行四邊形的底邊，長方形的寬邊就是平行四邊形的高。平行四邊形面積 = 長方形面積 = 長 × 寬 = 底 × 高。

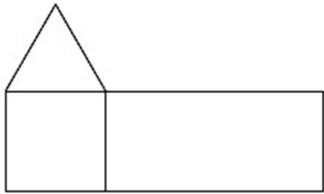


教師應強調長方形的長邊和寬邊互相垂直，因此平行四邊形的底邊和高也互相垂直，為以後找不同形狀平行四邊形給定底邊求對應高的問題鋪路。

- (2) 透過將兩個全等的三角形拼成平行四邊形的方式，導出三角形面積公式，其中三角形的底就是拼成平行四邊形的底，三角形的高就是拼成平行四邊形的高。三角形面積 = 平行四邊形面積 ÷ 2 = (底 × 高) ÷ 2。



學生並不知道兩個全等三角形拼成的四邊形一定是平行四邊形，教師應要求學生檢查拼成的四邊形是平行四邊形；也要強調平行四邊形的底和高互相垂直，所以三角形的底和高也互相垂直，為以後找不同形狀三角形給定底邊求對應高的問題鋪路。

題號	試題代碼		答案				
14	112-M5-C3-14		3				
評量指標	4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-n-18)						
知識向度	幾何		認知向度		解題思考		
題目	<p>妹妹拿出了一個正三角形、一個正方形及一個長方形的色紙貼成下面的圖形。</p>  <p>已知正三角形周長是 36 公分，長方形較長一邊的長是 26 公分，請問長方形面積是多少平方公分？</p> <p>① 76 ② 234 ③ 312 ④ 936</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：54%
	全 體	0.10	0.16	0.54	0.20	0.00	
	高分組	0.02	0.06	0.85	0.06	0.00	鑑別度：0.62
	低分組	0.19	0.24	0.24	0.33	0.01	
<b>一、試題分析</b> <b>(一) 評量目標</b> 本題給定有一邊等長的三角形、正方形和長方形拼成的複合圖形，要求學生求出長方形的面積，評量學生利用長方形面積公式解題的能力。 <b>(二) 數據說明</b> 1. 整體通過率 54%，高分組答對率 85%，低分組答對率 24%，鑑別度 0.62。 2. 54%的學生選擇正確答案③；10%的學生選擇①；16%的學生選擇②；20%的學生選擇④。							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為0.62，正確答案為選項③，通過率為54%，顯示超過五成的學生已具備利用長方形面積公式解題的能力。
2. 有10%的學生選擇①(低分組有19%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是他們誤解題意，算出長方形的周長，這些學生可能的算法如下： $36 \div 3 = 12$ ， $(12 + 26) \times 2 = 76$ 。
3. 有16%的學生選擇②(低分組有24%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是他們誤解題意，將正三角形周長誤看成正方形周長，這些學生可能的算法如下： $36 \div 4 = 9$ ， $26 \times 9 = 234$ 。
4. 有20%的學生選擇④(低分組有33%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是他理解題意，直接將題目給定的兩數相乘當成答案，他們可能的算法如下： $36 \times 26 = 936$ 。

### 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-18 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。(同 3-s-05) 3-s-02 能認識周長，並實測周長。	4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-n-18)	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-n-18)

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用長方形面積公式解題的能力。
2. 學生可能混淆長方形面積公式和長方形周長公式的意義。
3. 學生可能混淆正方形周長與正三角形周長的意義。

## (二) 核心概念與本題的教學重點

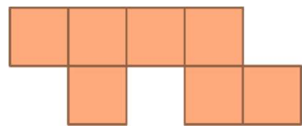
1. 學生常混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義，教師應多提供學生利用長度單位「1 公分」或「1 公尺」實測的經驗，例如 50 個「1 公分」接起來，剛好和甲繩一樣長，可以稱甲繩的長度是 50 公分；也應該多提供學生利用面積單位「1 平方公分」或「1 平方公尺」實測的經驗，例如將 30 個「1 平方公分」合起來，剛好和色紙一樣大，就可以稱色紙的面積是 30 平方公分。

「1 公分」和「1 平方公分」是兩種不相同的量，當學生有豐富的長度及面積單位實測的經驗，比較不會混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義。

2. 如果學生混淆正方形及長方形周長及面積公式，教師可以要求學生熟記面積公式即可，評量周長時，學生只要理解正方形邊長、長方形長邊、寬邊，以及圖形周長的意義，並畫出正方形及長方形的圖形，就能順利的解題。
3. 以「長 5 公分、寬 3 公分長方形的面積是多少平方公分？」為例，說明如何幫助學生理解長邊及寬邊都是整數公分的長方形面積公式。

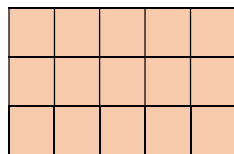
步驟一：建立單位面積 1 平方公分的概念

例如知道下圖是由 7 個 1 平方公分合起來的，所以下圖的面積是 7 平方公分。



步驟二：利用 1 平方公分的方瓦覆蓋給定的長方形，並利用乘法算式算出有多少個 1 平方公分。

例如下圖是用 1 平方公分方瓦覆蓋的長方形，要求學生用一排有幾個 1 平方公分，一共有幾排的方式，利用乘法「 $5 \times 3 = 15$ 」算出面積是 15 平方公分。



步驟三：理解被乘數、乘數和長邊、寬邊的公分數之間的關係。

例如長邊是 5 公分，剛好有 5 個 1 平方公分的方瓦，也就是一排有 5 個 1 平方公分，寬邊是 3 公分，剛好有 3 個 1 平方公分的方瓦，也就是一共有 3 排。

步驟四：透過長邊和寬邊的公分數，直接用乘法算出單位面積的個數，並形成長乘以寬面積公式算法的共識。

長邊是 5 公分，表示一排有 5 個 1 平方公分，寬邊是 3 公分，表示一共有 3 排，因此可以透過長邊及寬邊的公分數，利用一排有幾個、有幾排的方式算出長方形的面積，並得到「長方形面積 = 長邊的公分數 × 寬邊的公分數」的結果。

當學生有一些利用上述公式解題的經驗後，教師可以將上述公式中「長邊的公分數 × 寬邊的公分數」簡記為「長邊 × 寬邊」或「長 × 寬」。

題號	試題代碼					答案	
15	112-M5-A2-15					1	
評量指標	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。						
知識向度	數與計算		認知向度		程序執行		
題目	算算看， $308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 = ?$ ① 196 ② 260 ③ 1800 ④ 4200						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：41%
	全 體	0.41	0.23	0.25	0.10	0.00	
	高分組	0.73	0.15	0.06	0.05	0.00	鑑別度：0.58
	低分組	0.16	0.27	0.43	0.14	0.01	

### 一、試題分析

#### (一) 評量目標

本題是多步驟的四則混合計算問題，要求學生算出答案，評量學生多步驟整數四則混合計算的能力。

#### (二) 數據說明

1. 整體通過率 41%，高分組答對率 73%，低分組答對率 16%，鑑別度 0.58。
2. 41%的學生選擇正確答案①；23%的學生選擇②；25%的學生選擇③；10%的學生選擇④。

#### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為0.58，正確答案為選項①，通過率為41%，顯示超過四成的學生已具備多步驟整數四則混合計算的能力。
2. 有23%的學生選擇②(低分組有27%)，這些學生可能不具備多步驟整數四則混合計算的能力，他們知道括號要先算，但括號內有加和除的運算，學生忘記要先除後加，而直接由左往右算，但是算出括號內的答案後，他們又記得先乘除後加減的約定，這些學生可能的計算過程如下：

$$\begin{aligned}
& 308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 \\
& = 308 - 8 \times (15 \div 5) \times 2 \\
& = 308 - 8 \times 3 \times 2 \\
& = 308 - 24 \times 2 \\
& = 308 - 48 \\
& = 260
\end{aligned}$$

3. 有25%的學生選擇③(低分組有43%)，這些學生可能不具備多步驟整數四則混合計算的能力，他們知道括號要先算，但括號內有加有除，他直接由左往右算，但是算出括號內的答案後，接著又由左往右算，這些學生可能的計算過程如下：

$$\begin{aligned}
& 308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 \\
& = 308 - 8 \times (15 \div 5) \times 2 \\
& = 308 - 8 \times 3 \times 2 \\
& = 300 \times 3 \times 2 \\
& = 900 \times 2 \\
& = 1800
\end{aligned}$$

4. 有10%的學生選擇④(低分組有14%)，這些學生可能不具備多步驟整數四則混合計算的能力，他們在括號內的計算過程記得先乘除後加減的約定，但在算出括號內的答案後，又忘記先乘除後加減的約定，由左往右算算出答案，這些學生可能的計算過程如下：

$$\begin{aligned}
& 308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 \\
& = 308 - 8 \times (5 + 2) \times 2 \\
& = 308 - 8 \times 7 \times 2 \\
& = 300 \times 7 \times 2 \\
& = 2100 \times 2 \\
& = 4200
\end{aligned}$$

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-05 能做整數四則混合計算(兩步驟)。	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生面對多步驟計算問題時，不知道第一步要算什麼。
2. 學生可能混淆運算次序「括號先算、先乘除後加減、由左往右算」的約定。
3. 學生利用先乘除後加減的約定算出括弧內的數後，忽視加減與乘除混時，還要先乘除再進行加減運算。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師應區分運算次序與運算性質的差異，運算次序討論的重點是「括號先算、先乘除後加減、由左往右算」；運算性質討論的重點是「加法及乘法交換律、加法及乘法結合律、乘法對加法的分配律」等。
2. 四年級兩步驟計算問題中，只會用到：括號先算、先乘除後加減、由左往右算，這三個約定其中的一個約定。

建議教師將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題。

第一類：有括號的兩步驟計算問題

括號的部分要先算，簡稱為括號先算。

第二類：沒有括號的兩步驟計算問題

(1) 算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部分。簡稱為先乘除後加減。

(2) 算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。簡稱為由左往右算。

3. 五年級引入三步驟計算問題，學生只要知道第一步要算什麼，三步驟計算問題，就能簡化成兩步驟計算問題。四年級將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題的約定，也能適用於三步驟問題及更多步驟的問題。

第一類：有括號的三步驟計算問題

括號的部分要先算，簡稱為括號先算。

第二類：沒有括號的三步驟計算問題

(1) 算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部分。簡稱為先乘除後加減。

(2) 算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。簡稱為由左往右算。

題號	試題代碼					答案	
16	112-M5-A2-16					3	
評量指標	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算		認知向度		程序執行		
題目	下面哪個算式正確？ ① $1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} > 1 + \frac{4}{5}$ ② $1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} > 1 + \frac{6}{7}$ ③ $1\frac{4}{5} \times \frac{7}{6} > 1 + \frac{4}{5}$ ④ $1\frac{4}{5} \times \frac{7}{6} > \frac{7}{6} + \frac{7}{6}$						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：46%
	全 體	0.15	0.16	0.46	0.23	0.00	
	高分組	0.05	0.08	0.74	0.12	0.00	鑑別度：0.53
	低分組	0.25	0.25	0.21	0.28	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題給定四個分數乘法不等式，要求學生選出正確的不等式，評量學生利用分數乘法解決生活中問題的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 46%，高分組答對率 74%，低分組答對率 21%，鑑別度 0.53。							
2. 46%的學生選擇正確答案③；15%的學生選擇①；16%的學生選擇②；23%的學生選擇④。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項③，通過率為46%，顯示近五成的學生已具備利用分數乘法解決生活中問題的能力。							

2. 有15%的學生選擇①(低分組有25%)，這些學生可能不具備利用分數乘法解決生活中問題的能力，他們不知道被乘數乘以一個比1小的數後，積會小於原來的被乘數。這些學生可能的解題過程如下：

$$1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = (1 + \frac{4}{5}) \times \frac{6}{7} = \frac{6}{7} + \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} > 1 + \frac{4}{5}$$

3. 有16%的學生選擇②(低分組有25%)，這些學生可能不具備利用分數乘法解決生活中問題的能力，他們可能不理解帶分數 $1\frac{4}{5} = 1 + \frac{4}{5}$ ，也誤以為真分數乘以真分數的乘積會大於1，這些學生可能的解題過程如下：

$$1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = 1 + \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} > 1 + \frac{6}{7}$$

4. 有23%的學生選擇④(低分組有28%)，這些學生可能不具備利用分數乘法解決生活中問題的能力，他們可能不知道真分數乘以一數的積會小於該數。這些學生可能的解題過程如下：

$$1\frac{4}{5} \times \frac{7}{6} = (1 + \frac{4}{5}) \times \frac{7}{6} = \frac{7}{6} + \frac{4}{5} \times \frac{7}{6} > \frac{7}{6} + \frac{7}{6}$$

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-07 理解分數之「整數相除」的意涵。	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

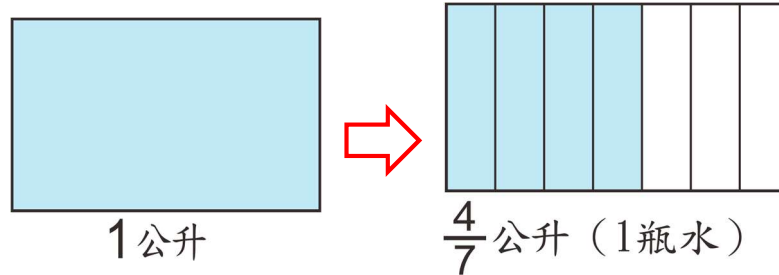
1. 學生可能不具備利用分數乘法解決生活中問題的能力。
2. 學生可能不理解「分數乘以一個比1小的數會小於該數」或「分數乘以一個比1大的數會大於該數」。
3. 學生只有比較兩個數字大小關係的能力，沒有比較兩個算式大小關係的能力。
4. 學生可能無法掌握帶分數的意義。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 下面以「一瓶水有 $\frac{4}{7}$ 公升， $\frac{3}{5}$ 瓶水有多少公升？」為例，說明為什麼可以透過「分子乘以分子，分母乘以分母」的方式算出答案。

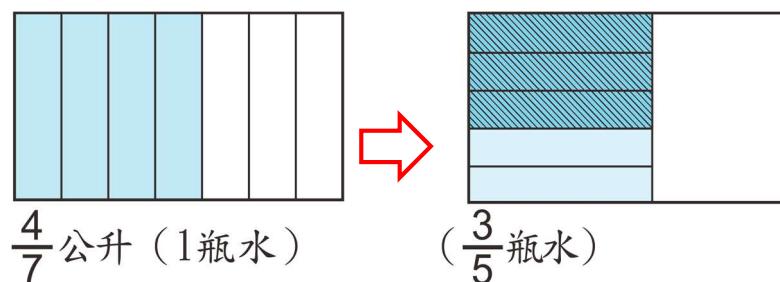
步驟一：題目問「水有多少公升？」，先畫一個長方形表示1公升，接著畫出 $\frac{4}{7}$

公升表示1瓶水，如下圖：



步驟二：以1瓶水( $\frac{4}{7}$ 公升)為單位，平分成5份，再取出其中的3份，並在這3份

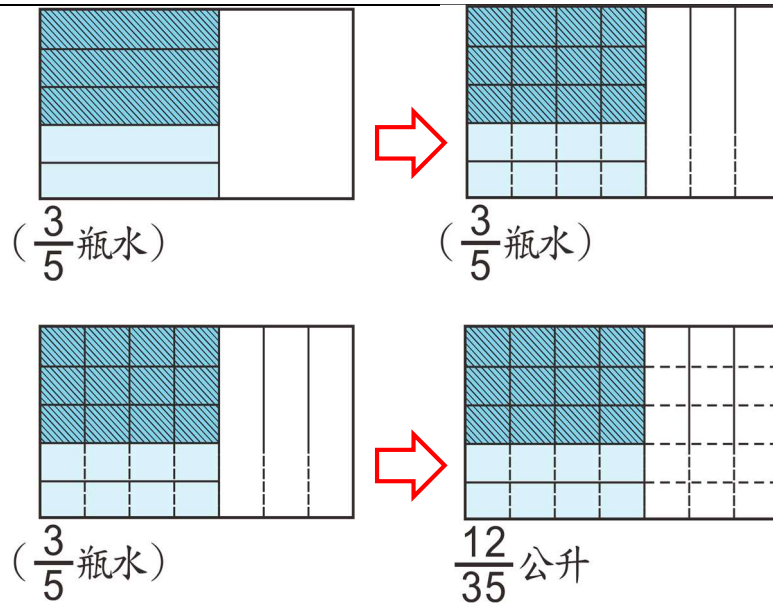
畫上斜線，斜線部分就是 $\frac{3}{5}$ 瓶水，如下圖：



步驟三：「和1公升(原來的長方形)比比看，1公升被分割成幾小份？」，可以用算式「 $7 \times 5 = 35$ 」算出1公升被分割成35小份，其中的1小份是

$\frac{1}{35}$ 公升。再算算看，斜線部分有幾小份，用算式「 $4 \times 3 = 12$ 」算出有

12小份，這12小份合起來是 $\frac{12}{35}$ 公升。如下圖：



步驟四：看著算式「 $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{7 \times 5}$ 」說說看：「分母乘以分母(7×5)」是否記錄了將1公升(原來的長方形)先平分成7份、每1份再平分成5小份？也就是將1公升平分成35(7×5)小份，而其中的1小份是 $\frac{1}{7 \times 5}$ 公升。」

「分子乘以分子(3×4)」是否記錄了有12個 $\frac{1}{7 \times 5}$ 公升？也就是12個 $\frac{1}{35}$ 公升。」

2. 以「一桶果汁 $\frac{5}{6}$ 公升， $\frac{3}{4}$ 桶有多少公升？」為例，學生利用「 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ 」解題時，

不宜要求學生將被乘數的分母6和乘數的分子3直接約分，因為 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{4}$ 兩個數字的單位不一樣。

當學生算出「 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ 」之後， $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ 是一個數字，因為分母的6和分子的

3有公因數3，所以可以將(6×4)和(5×3)同時除以3，得到

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times \cancel{3}^1}{\cancel{6}_2 \times 4} = \frac{5 \times 1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

教師也可以比對先約分和算出積後再約分的算式，幫助學生認識最後的結果都一樣，因此可以先約分後算出答案。

題號	試題代碼		答案				
17	112-M5-A1-17		4				
評量指標	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。						
知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
題目	<p>左圖是「<math>53 \div 7</math>」求商到小數第二位的直式計算。  右圖是「<math>53 \div 7</math>」求商到小數第三位的直式計算。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 7.57 \\ 7 \overline{)53} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 40 \phantom{00} \\ \underline{35} \phantom{00} \\ 50 \phantom{00} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 1 \phantom{00} \end{array}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 7.571 \\ 7 \overline{)53} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 40 \phantom{00} \\ \underline{35} \phantom{00} \\ 50 \phantom{00} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 10 \phantom{00} \\ \underline{7} \phantom{00} \\ 3 \phantom{00} \end{array}</math> </div> </div> <p>右圖中的除法直式將左圖除法直式下面的 1 後面補一個 0 繼續除，請問表示什麼意思？</p> <p>① 把 1 個 10 換成 10 個 1  ② 把 1 個 1 換成 10 個 0.1  ③ 把 1 個 0.1 換成 10 個 0.01  ④ 把 1 個 0.01 換成 10 個 0.001</p>						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：44%
	全 體	0.15	0.27	0.14	0.44	0.00	
	高分組	0.03	0.14	0.06	0.77	0.00	鑑別度：0.61
	低分組	0.26	0.35	0.22	0.16	0.01	
<b>一、試題分析</b> <b>(一) 評量目標</b> 本題給定整數除以整數且商為二位小數及三位小數的直式計算過程，要求學生選出商由二位小數改記成三位小數時餘數後面補 0 的理由，評量學生整數除以整數商是三位小數直式計算的能力。							

## (二) 數據說明

1. 整體通過率 44%，高分組答對率 77%，低分組答對率 16%，鑑別度 0.61。
2. 44%的學生選擇正確答案④；15%的學生選擇①；27%的學生選擇②；14%的學生選擇③。

## (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.61，正確答案為選項④，通過率為 44%，顯示超過四成的學生已具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力。
2. 有 15%的學生選擇①(低分組有 26%)，這些學生可能不具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，誤認為百分位的 1 是 1 個⑩。
3. 有 27%的學生選擇②(低分組有 35%)，這些學生可能不具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，誤認為百分位的 1 是 1 個①。
4. 有 14%的學生選擇③(低分組有 22%)，這些學生可能不具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，誤認為百分位的 1 是 1 個 0.1。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能已掌握整數除以整數商是整數的程序性計算過程，但是無法掌握計算過程中位值的意義，無法延伸商是整數的計算過程至商是小數的情境。
2. 學生可能不知道商是整數時餘數是多少個①，商是一位小數時餘數是多少個 0.1，商是二位小數時餘數是多少個 0.01。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師可以先布小數除以整數，商數是小數且有餘數的問題，例如：「 $17.5 \div 4$ 」。再布整數除以整數，商數是小數且有餘數的等分除問題，例如：「 $17 \div 4$ 」。

「 $17.5 \div 4$ 」的被除數是一位小數，學生較容易類比整數除法直式計算，將整數位的餘數 1 轉換成 10 個 0.1，再加上原有的 0.5 後繼續運算。而「 $17 \div 4$ 」的被除數是整數，學生不易自行加上小數點，再將整數位的餘數 1 轉換成 10 個 0.1。

2. 以「將 231.8 公升果汁，平分裝成 14 瓶，每瓶最多可以裝幾公升，剩下幾公升？(商數算到小數第一位)」為例，說明如何幫助學生解小數除以整數除法直式計算。

步驟一：將 231.8 分解為 2 個「100」、3 個「10」、1 個「1」和 8 個「0.1」。

步驟二：先分 2 個「100」，2 個「100」平分成 14 份不夠分；將 2 個「100」換成 20 個「10」，加上原有的 3 個「10」，合起來是 23 個「10」。23 個「10」平分成 14 份，每份是 1 個「10」。

步驟三：還剩下 9 個「10」不夠分，9 個「10」再換成 90 個「1」，加上原有的 1 個「1」，合起來是 91 個「1」。

步驟四：91 個「1」平分成 14 份，每份是 6 個「1」，分掉 84 個「1」。

步驟五：還剩下 7 個「1」不夠分，7 個「1」換成 70 個「0.1」，加上原有的 8 個「0.1」，合起來是 78 個「0.1」。

步驟六：78 個「0.1」平分成 14 份，每份是 5 個「0.1」，分掉 70 個「0.1」。

步驟七：剩下 8 個「0.1」。

步驟八：每瓶分到 1 個「10」、6 個「1」和 5 個「0.1」，剩下 8 個「0.1」，也就是每瓶分到 16.5 公升，剩下 0.8 公升。

上述的解題活動，可以使用下列直式來記錄：

	1 6.5	⇒ 步驟八
1 4	) 2 3 1.8	⇒ 步驟一
	1 4	⇒ 步驟二
	—	
	9 1	⇒ 步驟三
	8 4	⇒ 步驟四
	—	
	7 8	⇒ 步驟五
	7 0	⇒ 步驟六
	—	
	8	⇒ 步驟七

3. 最簡分數的分母是  $2^m \times 5^n$  的樣式，其中  $m$ 、 $n$  都是非負整數，才能轉換成有限小數。

例如： $\frac{3}{8}$  的分母是  $2^3 \times 5^0$ ，可以透過下列算式將  $\frac{3}{8}$  改記成有限小數。

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{8 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{10 \times 10 \times 10} = \frac{375}{1000} = 0.375。$$

4. 建議教師先幫助學生澄清整數情境等分除法解題的意義，再幫助學生將整數情境的除法問題延伸到小數情境。

(1) 整數情境等分問題解題的意義：有兩種解讀 5983 元的方式。

第一種：以 1 元為單位的合成方式，將 5983 元視為 5000 元、900 元、80 元和 3 元的合成結果。

第二種：以 1 千元、1 百元、十元及一元四個單位的合成方式，將 5983 元視為 5 張 1 千元、9 張 1 百元、8 個十元和 3 個一元的合成結果。

將 5983 元視為 5 張 1 千元、9 張 1 百元、8 個十元和 3 個一元的合成結果，可以將要運算的數字變小，方便計算。

以問題「將 5983 元平分給 72 人，每人最多可以分到幾元，剩下多少元？」

為例：可以將 5983 元視為 5 張千元鈔票、9 張百元鈔票、8 個十元硬幣、3 個

一元硬幣的合成結果：先分千元鈔票，5 張千元鈔票平分給 72 個人不夠分。

換成百元鈔票，5 張千元鈔票可以換 50 張百元鈔票，加上原有的 9 張百元鈔票，合起來有 59 張百元鈔票。59 張百元鈔票平分給 72 個人不夠分，再換成

十元硬幣，59 張百元鈔票可以換成 590 個十元硬幣，加上原有的 8 個十元硬幣，合起來有 598 個十元硬幣。598 個十元硬幣平分給 72 個人，每個人分到

8 個十元硬幣。還剩下 22 個十元硬幣不夠分，再換成一元硬幣，22 個十元硬幣可以換成 220 個一元硬幣，加上原有的 3 個一元硬幣，合起來有 223 個一

元硬幣。223 個一元硬幣平分給 72 個人，每個人分得 3 個一元硬幣，還剩下 7 個一元硬幣。

因此，每一個人分到 8 個十元硬幣和 3 個一元硬幣，還剩下 7 個一元硬幣，

也就是說，每個人分到 83 元，剩下 7 元。

上述的解題活動可以使用下列直式來記錄：

千百十個	8 3	→ 每人先分到8個十元硬幣，再分到3個一元硬幣。
7 2 )	5 9 8 3	→ 每人先分到8個十元硬幣，用掉576個十元硬幣。
	- 5 7 6	
	2 2 3	→ 剩下22個十元硬幣，換成220個一元硬幣， 和題目裡的3個一元硬幣合起來有223個一元硬幣。
	- 2 1 6	→ 每人再分到3個一元硬幣，用掉216個一元硬幣。
	7	→ 剩下7個一元硬幣

(2) 小數情境等分除問題解題的意義：

下面以「 $31.8 \div 5$ 」為例，說明小數除以整數除法算則解題的意義。

建議教師依下列步驟幫助學生解題。

步驟一：將 31.8 分解為 3 個「10」、1 個「1」和 8 個「0.1」。

步驟二：先分 3 個「10」，3 個「10」平分成 5 份不夠分；將 3 個「10」換成 30 個「1」，加上原有的 1 個「1」，合起來是 31 個「1」。31 個「1」平分成 5 份，每份是 6 個「1」。

步驟三：還剩下 1 個「1」不夠分，1 個「1」再換成 10 個「0.1」，加上原有的 8 個「0.1」，合起來是 18 個「0.1」。

步驟四：18 個「0.1」平分成 5 份，每份是 3 個「0.1」，分掉 15 個「0.1」。

步驟五：還剩下 3 個「0.1」不夠分，3 個「0.1」換成 30 個「0.01」。

30 個「0.01」平分成 5 份，每份是 6 個「0.01」。

每瓶分到 6 個「1」、3 個「0.1」和 6 個「0.01」，也就是每瓶分到 6.36 公升。

上述的解題活動可以使用下列直式來記錄：

十個 位	大百 位	小 位	小 位	
				6.3 6
				→ 每人先分到6個「1」，再分到3個「0.1」，最後分到6個「0.01」。 合起來是6.36。
5 )	3	1	8	3
	- 3	0		
	1	8		
	- 1	5		
		3	0	
		- 3	0	
		0		
				→ 30個「0.01」平分成5份，每份是6個「0.01」，分掉30個「0.01」。
				0 → 剩下0個「0.01」。

題號	試題代碼						答案
18	112-M5-A1-18						3
評量指標	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。						
知識向度	數與計算		認知向度			概念理解	
題目	<p>「1.99、<math>2\frac{3}{10}</math>、<math>\frac{14}{5}</math>、2.5」，這四個數中，哪個數最大？</p> <p>① 1.99            ② <math>2\frac{3}{10}</math>            ③ <math>\frac{14}{5}</math>            ④ 2.5</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：58%
	全 體	0.08	0.10	0.58	0.24	0.01	
	高分組	0.02	0.01	0.87	0.09	0.00	鑑別度：0.60
	低分組	0.16	0.22	0.27	0.34	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題給定一位小數、二位小數、假分數及帶分數等四個數，要求學生選出最大的數，評量學生是否具備分數與小數互換及比較大小的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 58%，高分組答對率 87%，低分組答對率 27%，鑑別度 0.60。							
2. 58%的學生選擇正確答案③；8%的學生選擇①；10%的學生選擇②；24%的學生選擇④。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.60，正確答案為選項③，通過率為58%，顯示近六成的學生已具備分數與小數互換及比較大小的能力。							

2. 有8%的學生選擇①(低分組有16%)，這些學生可能不具備分數與小數互換及比較大小的能力，他們可能不理會小數點，也不理解帶分數的意義，或認為分數一定比整數小，直接比較整數199、2和25，得到1.99最大的答案。
3. 有10%的學生選擇②(低分組有22%)，這些學生可能不具備分數與小數互換及比較大小的能力，誤認為帶分數最大。
4. 有24%的學生選擇④(低分組有34%)，這些學生可能不具備分數與小數互換及比較大小的能力；他們可能已具備比較小數大小的能力，但是無法將 $\frac{14}{5}$ 轉換成小數，因此只比較1.99、2.3和2.5的大小，得到2.5最大的答案。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-11 能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生無法將分數轉換成小數，或小數轉換成分數。
2. 學生可能無法比較小數的大小。
3. 學生可能無法比較分數的大小。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 等值分數是約分、擴分和通分的前置經驗，以及異分母分數加減的基礎，教學上

稱 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{4}$ 為等值分數，而不稱它們是相等的分數，表示它們是不同的兩個分數，

只是等值(量一樣多)。

以 $\frac{1}{2}$ 條繩子和 $\frac{2}{4}$ 條繩子為例， $\frac{1}{2}$ 條繩子是將1條繩子平分成2段後其中1段的名字，

$\frac{2}{4}$ 條繩子是將1條繩子平分成4段後其中2段的名字， $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條的分割和合

成的方式都不相同，因此以 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條是兩個不同的分數。但是 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條繩子的長度相同，數學上稱長度相同的 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條繩子為等值分數，將 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條繩子長度相同的結果記成 $\frac{1}{2}$ 條 =  $\frac{2}{4}$ 條。

建議教師先引入「 $\frac{1}{2}$ 條 =  $\frac{2}{4}$ 條」的記法，當學生掌握等值分數的意義後，

才能將「 $\frac{1}{2}$ 條 =  $\frac{2}{4}$ 條」的記法簡記成「 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 」。

2. 四年級等值分數的教學必須在具體情境中進行，例如「 $\frac{1}{2}$ 條繩子的長度和 $\frac{2}{4}$ 條繩

子一樣長，可以記成 $\frac{1}{2}$ 條 =  $\frac{2}{4}$ 條」，或「 $\frac{2}{3}$ 張色紙的面積和 $\frac{4}{6}$ 張色紙一樣大，可

以記成 $\frac{2}{3}$ 張 =  $\frac{4}{6}$ 張」，或「 $\frac{2}{5}$ 包水餃和 $\frac{4}{10}$ 包水餃的個數一樣多，可以記成 $\frac{2}{5}$ 包

=  $\frac{4}{10}$ 包」。

3. 「進行簡單異分母分數的大小比較與加減」中的「簡單異分母分數」，指的是一分母為另一分母之倍數。

4. 以「比較 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{3}{4}$ 條誰比誰長？」為例，教師應在長度情境中，先找出 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$

條一樣長，再比較出 $\frac{3}{4}$ 條比 $\frac{2}{4}$ 條長。最後才將 $\frac{3}{4}$ 條比 $\frac{2}{4}$ 條長的結果記成「 $\frac{3}{4}$ 條 >

$\frac{1}{2}$ 條」。當學生掌握等值分數的意義後，才能將「 $\frac{3}{4}$ 條 >  $\frac{1}{2}$ 條」的記法簡記成「 $\frac{3}{4}$

>  $\frac{1}{2}$ 」。

5. 為「能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算」及「能用約分、擴分處理等值分數的換算」都是五年級的教材，因此四年級「簡單分數與小數的互換」中的「簡單」，指的是只處理分母為2、5、10、100的情況。

題號	試題代碼					答案	
19	112-M5-C3-19					2	
評量指標	5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。						
知識向度	幾何		認知向度		解題思考		
題目	<p>已知三角形的兩邊長分別是 5 公分和 15 公分。 下列何者可能是這個三角形的周長？</p> <p>① 30 公分 ② 35 公分 ③ 40 公分 ④ 45 公分</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：46%
	全 體	0.22	0.46	0.15	0.15	0.01	
	高分組	0.15	0.67	0.07	0.11	0.00	鑑別度：0.41
	低分組	0.28	0.26	0.24	0.21	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
<p>本題給定三角形兩邊的長度，要求學生選出三角形可能周長的選項，評量學生利用三角形任意兩邊和大於第三邊性質解題的能力。</p>							
<b>(二) 數據說明</b>							
<p>1. 整體通過率 46%，高分組答對率 67%，低分組答對率 26%，鑑別度 0.41。</p> <p>2. 46%的學生選擇正確答案②；22%的學生選擇①；15%的學生選擇③；15%的學生選擇④。</p>							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
<p>1. 本題鑑別度為0.41，正確答案為選項②，通過率為46%，顯示近五成的學生已具備利用三角形任意兩邊和大於第三邊性質解題的能力。</p> <p>2. 有22%的學生選擇①(低分組有28%)，這些學生可能尚未理解三角形任意兩邊和大於第三邊的性質，誤以為三角形中任意兩邊和等於第三邊亦可形成三角形，因此選擇此答案。學生可能的算法如下：</p>							

$$30 - (5+15)=10 \cdot 10+5=15 \circ$$

3. 有15%的學生選擇③(低分組有24%)，這些學生可能尚未理解三角形任意兩邊和大於第三邊的性質，誤以為三角形中任意兩邊和等於第三邊亦可形成三角形，因此選擇此答案。學生可能的算法如下：

$$40 - (5+15)=20 \cdot 5+15=20 \circ$$

4. 有 15%的學生選擇④(低分組有 21%)，這些學生尚未理解三角形任意兩邊和大於第三邊的性質。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	1-s-1 能認識直線與曲線。 4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。	5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 以三角形三邊長是  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為例，學生可能誤解「三角形任意兩邊和大於第三邊」的意義，誤認為只要「 $a+b>c$ 、 $b+c>a$ 、 $a+c>b$ 」中有一組成立就可以圍成三角形，不知道必須三組都成立才可以圍成三角形。
2. 可能學生上課操作的都是具體物(例如數棒)，但是評量時出現的都是數字，學生可能無法連結數棒長短和數字大小間的關係。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 五年級學生應該已能掌握連接兩點的繩子，以直線為最短。教師可以利用這個性質，幫助學生理解三角形任意兩邊和大於第三邊。以三角形  $ABC$  為例，連接  $A$ 、 $B$  兩點的繩子，以線段  $AB$  為最短，所以  $AC+BC>AB$ ；連接  $A$ 、 $C$  兩點的繩子，以線段  $AC$  為最短，所以  $BC+AB>AC$ ；連接  $B$ 、 $C$  兩點的繩子，以線段  $BC$  為最短，所以  $AB+AC>BC$ ，也就是三角形任意兩邊和大於第三邊。

2. 「三角形任兩邊的和大於第三邊」與「三角形比較短的兩邊和大於最長邊」是等價的定義。假設三角形三邊的長度是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ， $a \geq b \geq c$ ，如果  $b + c > a$  成立，那麼  $a + b > c$ 、 $a + c > b$  一定也會成立。所以當「三角形比較短的兩邊和大於最長邊」成立時，「三角形任兩邊的和大於第三邊」也會成立。

建議教師教學時必須說明「三角形任兩邊的和大於第三邊」的性質，但是在判斷是否能圍成三角形時，只要判斷「比較短的兩邊和是否大於最長邊」即可。學生只要掌握「比較短的兩邊和大於最長邊」時，就能圍成三角形，就能發展出「比較短的三邊和大於最長邊」時，就能圍成四邊形，以及「比較短的  $n - 1$  邊和大於最長邊」時，就能圍成  $n$  邊形的性質。

3. 判斷給定的三線段是否能拼成三角形時，不必檢查任意兩邊和大於第三邊，只要檢查較短的兩邊和是否大於最長邊即可。

如左下圖，較短的兩邊和大於最長邊，因此可以圍成一個三角形。

如右下圖，較短的兩邊和小於最長邊，因此不可以圍成一個三角形。



題號	試題代碼					答案	
20	112-M5-A3-20					3	
評量指標	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算		認知向度		解題思考		
題目	<p>日常生活中常聽到「奈米科技」，奈米和毫米一樣，都是長度的單位，1 毫米是千分之一米，也就是千分之一公尺，1 奈米是十億分之一米，也就是十億分之一公尺。</p> <p>頭髮的直徑大約是 40000 奈米，請問 40000 奈米和多少公尺一樣長？</p> <p>① 0.004</p> <p>② 0.0004</p> <p>③ 0.00004</p> <p>④ 0.000004</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：32%
	全 體	0.13	0.29	0.32	0.26	0.01	
	高分組	0.06	0.19	0.50	0.25	0.00	鑑別度：0.31
	低分組	0.18	0.39	0.19	0.23	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題先說明奈米的定義，再要求學生算出幾奈米和多少公尺一樣長，評量學生是否認識多位小數並具備長度單位奈米和公尺化聚的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 32%，高分組答對率 50%，低分組答對率 19%，鑑別度 0.31。							
2. 32%的學生選擇正確答案③；13%的學生選擇①；29%的學生選擇②；26%的學生選擇④。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.31，正確答案為選項③，通過率為32%，顯示超過三成的學生已認識多位小數並具備長度單位奈米和公尺化聚的能力。							

2. 有13%的學生選擇①(低分組有18%)，這些學生可能不認識多位小數、也不具備長度單位奈米和公尺化聚的能力，他們可能不理解題意，受到題目中「千分之一公尺」敘述的影響，誤認為40000奈米就是千分之四公尺，所以選擇0.004這個答案。
3. 有29%的學生選擇②(低分組有39%)，這些學生可能不認識多位小數、也不具備長度單位奈米和公尺化聚的能力，他們可能不理解題意，將40000奈米化成公尺時，誤認為要在小數的萬分位標記4，所以得到0.0004這個答案。
4. 有26%的學生選擇④(低分組有23%)，這些學生可能不認識多位小數、也不具備長度單位奈米和公尺化聚的能力，它們可能以小數點為對稱中心，類比整數的命名方式：個位、十位、百位、千位、.....，將小數點後的各位值誤判為：個分位、十分位、百分位、千分位、.....，因此將十億分之一轉換成小數時，誤認為十億分之一=0.0000000001，所以40000奈米=0.000004公尺。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生不理解小數位值命名的意義，「十分位」的「1」代表 $\frac{1}{10}$ 、「百分位」的「1」代表 $\frac{1}{100}$ 、.....。
2. 學生可能以小數點為對稱中心，類比整數的命名方式：個位、十位、百位、千位、.....，將小數點後的各位值誤判為：個分位、十分位、百分位、千分位、.....。
3. 學生可能不認識多位小數、也不具備長度單位奈米和公尺化聚的能力。

## (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 小數是整數十進位系統的延伸，在引入一位小數時，十分位的值必須是個位的 $\frac{1}{10}$

倍，因此規定「 $0.1 = \frac{1}{10}$ 」。

在引入二位小數時，百分位的值必須是個位的 $\frac{1}{100}$ 倍，因此規定「 $0.01 = \frac{1}{100}$ 」。

百分位位名的由來是「 $\frac{1}{100} = 0.01$ 」的關係。

相同的理由，千分位的值必須是個位的 $\frac{1}{1000}$ 倍，因此規定「 $0.001 = \frac{1}{1000}$ 」，

以此類推。

2. 透過下列兩組數字，說明小數點的功能。

第一組數字： 7.7    77.77    777.777

第二組數字： 77.7    777.77    7777.777

就數字本身視覺的觀點，7.7 小數點的左邊及右邊各有一個 7，77.77 小數點的左邊及右邊各有二個 7，777.777 小數點的左邊及右邊各有三個 7，因此以小數點為對稱中心時，第一組小數是左右對稱的。

但是就位值的觀點，第二組小數才是左右對稱的。當我們以個位的 7 為對稱中心，並忽略小數點時，左右兩邊的位值是對稱的，個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，十位的左邊是百位，十分位的右邊是百分位，百位的左邊是千位，百分位的右邊是千分位，十位及十分位，百位及百分位，千位及千分位分別對稱於個位。如下所示：

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
		7	7.	7		
	7	7	7.	7	7	
7	7	7	7.	7	7	7

因為數字的單位是 1，而記幾個 1 的位置是個位，因此個位才是數字的對稱中心。個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，不會有個分位的位名，而小數點的功能是告訴我們個位在哪裡。

3. 教師宜透過「先比較整數部分，再比較小數部分」的方法，幫助學生比較多位小數的大小。先比較整數部分，再類比整數比較大小的經驗，進行小數部分的大小比較，依序比較十分位、百分位、千分位的數字。

下面以「12.5、5.21、5.2099 哪一個數最大？哪一個數最小？」為例，說明如何幫助學生解題。建議教師依下列步驟幫助學生解題：

步驟一：先比較整數部分。「12.5」、「5.21」、「5.2099」整數部分的數字分別是 12、5、5，12 比 5 大，所以，「12.5」最大。

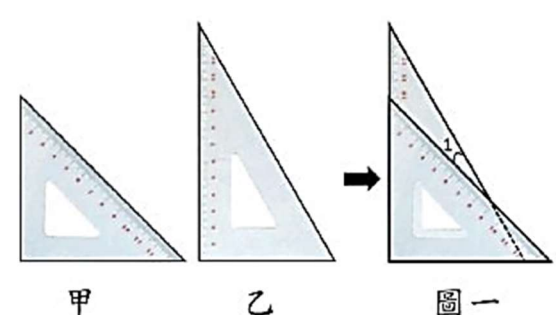
步驟二：再比較小數部分。「5.21」、「5.2099」整數部分的數字都是 5，所以依序比較十分位、百分位、千分位的數字。「5.21」、「5.2099」的十分位數字都是 2，表示有 2 個 0.1。「5.21」、「5.2099」的百分位數字分別是 1 和 0，分別表示 1 個 0.001 和 0 個 0.001，0 個比 1 個小，所以「5.2099」最小。

4. 以長度的單位為例，我國每十倍就會有一個單位的名稱，例如公里、公引、公丈、公尺、公寸、公分、公厘都是長度的單位；公制單位每十倍也會有一個單位的名稱，例如 km(千米)、hm(百米)、dam(十米)、m(米)、dm(分米)、cm(厘米)、mm(毫米)等都是長度的單位，但是日常生活中，並不需要用到這麼多的單位。

以公制長度的基本單位「米」為例，西方人認為 1000 以內的數量都是可以掌握的，因此 13 個「1 米」稱為 13 米即可，並不需要引入新的單位「十米」，將 13 米稱為 1「十米」3「米」；278 個「1 米」稱為 278 米即可，並不需要引入新的單位「百米」和「十米」，將 278 米稱為 2「百米」7「十米」8「米」。當「1 米」的個數超過 1000 個時，才需要引入新的單位「千米」，並將 2465 個「1 米」稱為 2「千米」465「米」。

公制單位是西方人發明的，延伸西方人三位一撇的概念，在長度單位中，經常使用的單位是「千米」、「米」、「毫米」、「微米」、「奈米」，其中「千米」是「米」的 1000 倍，「米」是「毫米」的 1000 倍、「毫米」是「微米」的 1000 倍、「微米」是「奈米」的 1000 倍，也就是說，經常使用的單位間都滿足 1000 倍的關係。轉換成我們熟悉的單位，日常生活中經常使用的長度單位是「公里」、「公尺」、「公分」、「公厘」，重量單位是「公噸」、「公斤」、「公克」，容量單位是「公秉」、「公升」、「公撮」，如果將公分拿走，相鄰兩個單位間

都是 1000 倍的關係。換句話說，只要能掌握三位一撇的概念，再記憶公分和公尺、公分和公厘的倍數關係，就可以掌握國小階段長度、重量、容量相鄰單位間的倍數關係。

題號	試題代碼		答案				
21	112-M5-C3-21		3				
評量指標	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。						
知識向度	幾何		認知向度		解題思考		
題目	<p>如圖，甲三角板三個角的角度是 45 度、45 度和 90 度，乙三角板三個角的角度是 30 度、60 度和 90 度。  <u>小明</u>將這兩個三角板疊成圖一，請問圖一中角 1 的角度是多少度？</p>  <p>甲                  乙                  圖一</p> <p>① 5          ② 10          ③ 15          ④ 25</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：49%
	全 體	0.22	0.19	0.49	0.09	0.01	
	高分組	0.10	0.10	0.76	0.04	0.00	鑑別度：0.50
	低分組	0.30	0.26	0.26	0.16	0.01	
<b>一、試題分析</b> <p>(一) 評量目標</p> <p>本題給定兩個三角板及其三個角的角度，要求學生選出這兩個三角板疊合時指定角的角度，評量學生利用三角形內角和為 180 度解題的能力。</p> <p>(二) 數據說明</p> <p>1. 整體通過率 49%，高分組答對率 76%，低分組答對率 26%，鑑別度 0.50。</p> <p>2. 49%的學生選擇正確答案③；22%的學生選擇①；19%的學生選擇②；9%的學生選擇④。</p>							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為0.50，正確答案為選項③，通過率為49%，顯示近五成的學生已具備利用三角形內角和為180度解題的能力。
2. 有22%的學生選擇①(低分組有30%)，這些學生可能不具備利用三角形內角和為180度解題的能力。
3. 有19%的學生選擇②(低分組有26%)，這些學生可能不具備利用三角形內角和為180度解題的能力。
4. 有9%的學生選擇④(低分組有16%)，這些學生可能不具備利用三角形內角和為180度解題的能力。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-16 能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度或畫出指定的角度。 (同 4-s-04)	5-s-01 能透過操作，理解三角形內角和為 180 度。	S -8-2 凸多邊形的內角和：凸多邊形的意義；內角與外角的意義；凸多邊形的內角和公式；正 n 邊形的每個內角度數。 備註：不處理多邊形外角和公式。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用三角形內角和為 180 度解題的能力。
2. 學生可能無法從複雜圖形中察覺角 1 與給定角度間的關係。
3. 學生可能直觀的猜測角 1 的角度，或用量角器測量角 1 的角度。

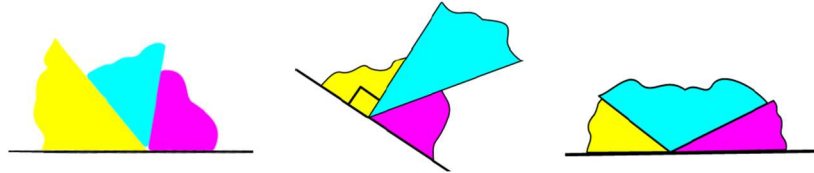
### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 下面提供三種幫助學生理解三角形的內角和是 180 度的方法：

方法一：拿出或畫出很多不同的三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生測量出這些三角形的所有角，再分別算出這些三角形三個角的和。幫助學生察覺所有三角形三個角的角度和大約都是 180 度。

方法二：拿出一些三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生剪下三角形的 3 個角，再將同一個三角形的 3 個角拼湊在一起，幫助學生察覺所有三角形的三個角都可以拼成一個平角，這些三角形 3 個角的角度和大約都是 180 度。

方法三：教師也可以只剪下兩個角，再和沒有剪下的那個角拼湊在一起，也能夠拼出一個平角，得到三角形 3 個角的角度和大約都是 180 度。



2. 教師應注意教學重點是所有三角形的內角和都是 180 度，教師不宜只求出某一個三角形的內角和是 180 度，就說明所有三角形的內角和都是 180 度。教師應幫助學生認識，直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形的內角和都是 180 度。

題號	試題代碼					答案	
22	112-M5-A3-22					3	
評量指標	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算		認知向度		解題思考		
題目	<p>一桶果汁有 7 公升，老闆買了 5 桶果汁，用掉了 <math>\frac{1}{3}</math> 公升果汁，請問用掉了多少桶果汁？</p> <p>① <math>\frac{1}{3}</math></p> <p>② <math>\frac{1}{15}</math></p> <p>③ <math>\frac{1}{21}</math></p> <p>④ <math>\frac{1}{105}</math></p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：28%
	全 體	0.15	0.35	0.28	0.20	0.01	
	高分組	0.11	0.29	0.36	0.23	0.01	鑑別度：0.13
	低分組	0.18	0.40	0.23	0.17	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題是用桶及公升兩個單位描述果汁的文字題，要求學生回答幾分之一公升果汁是多少桶，評量學生利用分數除以整數的分數除法解決生活中問題的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 28%，高分組答對率 36%，低分組答對率 23%，鑑別度 0.13。							
2. 28%的學生選擇正確答案③；15%的學生選擇①；35%的學生選擇②；20%的學生選擇④。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.13，正確答案為選項③，通過率為28%，顯示近三成的學生已具備利用除數為整數的分數除法解決生活中問題的能力。							

2. 有 15% 的學生選擇①(低分組有 18%)，這些學生可能不具備利用分數除以整數的分數除法解決生活中問題的能力，他們認為 $\frac{1}{3}$ 公升就是 $\frac{1}{3}$ 桶。
3. 有 35% 的學生選擇②(低分組有 40%)，這些學生可能不具備利用分數除以整數的分數除法解決生活中問題的能力；他們也可能混淆桶及公升單位的意義。
4. 有 20% 的學生選擇④(低分組有 17%)，這些學生可能不具備利用分數除以整數的分數除法解決生活中問題的能力；他們也可能混淆桶及公升單位的意義。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-07 理解分數之「整數相除」的意涵。	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不熟悉利用桶及公升兩個單位描述果汁的情境。
2. 學生可能混淆桶及公升兩個單位計數的意義，不知道 1 桶果汁 7 公升， $\frac{1}{3}$ 公升是 1 公升的 $\frac{1}{21}$ ，也就是 1 桶的 $\frac{1}{21}$ ，所以 $\frac{1}{3}$ 公升是 $\frac{1}{21}$ 桶。
3. 學生混淆桶及公升兩個單位計數的意義，隨意將題目中給定的數字相除。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 整數除以整數的等分除問題為整數乘以分數問題的先備知識，以整數乘以分數的乘法問題「一瓶果汁有 3 公升， $\frac{2}{7}$ 瓶果汁是多少公升？」為例，學生必須透過先除「 $3 \div 7 = \frac{3}{7}$ 」再乘「 $\frac{3}{7} \times 2 = \frac{6}{7}$ 」兩個步驟，才能算出 $\frac{2}{7}$ 瓶果汁有 $\frac{6}{7}$ 公升；其中整數除以整數「 $3 \div 7 = \frac{3}{7}$ 」是本基本學習內容教學的重點。

2. 區分有餘數及沒有餘數問題的意義及記法：

有餘數問題的記法： $a \div b = q \dots r$ ， $q$  是整數， $0 \leq r < b$ 。

沒有餘數問題的記法： $a \div b = \frac{a}{b}$ ， $b \neq 0$ 。

有餘數的等分除問題：13 個蘋果平分給 5 個人，每人最多分到幾個？剩下幾個蘋果？

$$13 \div 5 = 2 \dots 3$$

答：每人最多分到 2 個，剩下 3 個蘋果。

沒有餘數的等分除問題：13 個蘋果平分給 5 個人，全部分完，每人分到幾個蘋果？

$$13 \div 5 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

答：每人分到  $\frac{13}{5}$  (或  $2\frac{3}{5}$ ) 個蘋果。

有餘數的包含除問題：13 公分長的繩子，5 公分剪一段，最多可以剪幾段，剩下幾公分？

$$13 \div 5 = 2 \dots 3$$

答：最多可以剪成 2 段，剩下 3 公分。

沒有餘數的包含除問題：13 公分長的繩子，5 公分剪成一段，全部剪完，相當於剪成幾段？

$$13 \div 5 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

答：相當於剪成  $\frac{13}{5}$  (或  $2\frac{3}{5}$ ) 段。

下列問題的餘數是 0，餘數是 0 的問題也屬於有餘數的問題：15 個蘋果平分給 5 個人，每人最多分到幾個？剩下幾個蘋果？

$$15 \div 5 = 3 \dots 0$$

答：每人最多分到 3 個，剩下 0 個蘋果。

3. 以等分除問題「5 公升果汁，平分裝成 3 瓶，全部裝完，每瓶裝幾公升？」為例，可以有兩種解題的策略，第一種是回到整數除以整數，商數是整數，餘數是 0 的舊經驗；第二種是回到分數命名的舊經驗(每次拿 1 公升來分)，建議教師必須引入第二種解題策略，幫助學生擴展分數的意義。下面分別說明這兩種解題策略。

第一種：回到整數除以整數，商數是整數，餘數是 0 的舊經驗

$$5 \text{ 公升} = \frac{15}{3} \text{ 公升} \text{ (15 個 } \frac{1}{3} \text{ 公升)}, 15 \div 3 = 5 \text{ (5 個 } \frac{1}{3} \text{ 公升)},$$

$$\text{答：每瓶裝 } \frac{5}{3} \text{ 公升}$$

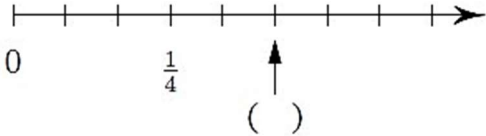
第二種：回到分數命名的舊經驗(每次拿 1 公升來分)

$$1 \div 3 = \frac{1}{3} \text{ (1 公升果汁平分成 3 份，其中的 1 份是 } \frac{1}{3} \text{ 公升)}$$

$$5 \text{ 公升是 5 個 1 公升} \Rightarrow \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3} \text{ (公升)}, \text{ 答：每瓶裝 } \frac{5}{3} \text{ 公升}$$

當學生有一些解題成功的經驗後，應要求學生用沒有餘數的除法算式「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」把問題和答案記下來，並說明以後再遇到這個問題時，可以直接利用整數除

以整數的算式「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」算出答案。

題號	試題代碼		答案				
23	112-M5-A2-23		4				
評量指標	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。						
知識向度	數與計算	認知向度	程序執行				
題目	<p>下面是一條數線，( ) 內要填入哪個數？</p>  <p>① <math>\frac{3}{4}</math>          ② <math>\frac{5}{8}</math>          ③ <math>\frac{5}{10}</math>          ④ <math>\frac{5}{12}</math></p>						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：26%
	全 體	0.45	0.18	0.09	0.26	0.01	
	高分組	0.20	0.17	0.08	0.54	0.01	鑑別度：0.46
	低分組	0.65	0.16	0.10	0.08	0.01	
<b>一、試題分析</b> <b>(一) 評量目標</b> 本題給定標示 0 及一個單位分數的數線及數線上一點，要求學生選出該點的坐標，評量學生是否掌握分數數線的意義。 <b>(二) 數據說明</b> 1. 整體通過率 26%，高分組答對率 54%，低分組答對率 8%，鑑別度 0.46。 2. 26% 的學生選擇正確答案④；45% 的學生選擇①；18% 的學生選擇②；9% 的學生選擇③。 <b>(三) 選項及學生表現說明</b> 1. 本題鑑別度為 0.46，正確答案為選項④，通過率為 26%，顯示近三成的學生已掌握分數數線的意義。							

2. 有 45% 的學生選擇①(低分組有 65%)，這些學生可能無法掌握分數數線的意義；也可能不知道數線的單位都是 1，無法將單位 1 進行兩次的分割，他們直接以  $\frac{1}{4}$  為單位計數 3 格，得到  $\frac{3}{4}$  的答案。
3. 有 18% 的學生選擇②(低分組有 16%)，這些學生可能無法掌握分數數線的意義；也可能不知道數線的單位都是 1，無法將單位 1 進行兩次的分割，他們以 0 到  $\frac{1}{4}$  中間的 2 個點來進行分割，得到一份是  $\frac{1}{8}$ ，從頭開始數，得到  $\frac{5}{8}$  的答案。
4. 有 9% 的學生選擇③(低分組有 10%)，這些學生可能無法掌握分數數線的意義；也可能不知道數線的單位都是 1，無法將單位 1 進行兩次的分割，他們直接以  $\frac{1}{10}$  為單位計數 5 格，得到  $\frac{5}{10}$  的答案。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。	N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a-b $ 表示數線上兩點 $a, b$ 的距離。 備註：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能無法掌握分數數線的意義。
2. 學生可能不知道數線的單位都是 1，無法將單位 1 進行兩次的分割。

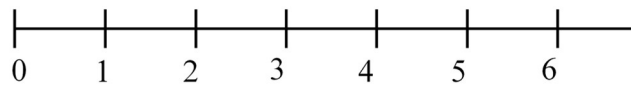
3. 學生可能無法進行數線上刻度 $\frac{1}{4}$ 和長度 $\frac{1}{4}$ 的轉換，例如在數線上點的坐標是 $\frac{1}{4}$ ，

該點和原點 0 的距離是 $\frac{1}{4}$ 。

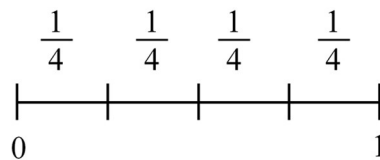
## (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師可以透過下列方法繪製分數數線，幫助學生認識分數數線：

步驟一：先復習整數數線的意義，幫助學生標示出整數數線 0、1、2、...。



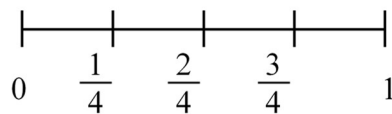
步驟二：先建立 0 和 1 間的分數數線。0 和 1 兩點間的距離是 1，將 1 平分成 4 份，其中的 1 份長 $\frac{1}{4}$ ，在數線標示每一份的長是 $\frac{1}{4}$ 。



步驟三：透過和 0 的距離是多少的想法，標示出數線上的分數。

數線上的 $\frac{1}{4}$ 指的是 $\frac{1}{4}$ 和 0 的距離是 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{2}{4}$ 指的是 $\frac{2}{4}$ 和 0 的距離是

2 個 $\frac{1}{4}$ ，也就是 $\frac{2}{4}$ ， $\frac{3}{4}$ 指的是 $\frac{3}{4}$ 和 0 的距離是 3 個 $\frac{1}{4}$ ，也就是 $\frac{3}{4}$ 。



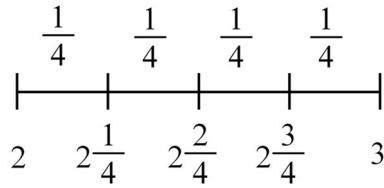
步驟四：仿前面建立 0 和 1 間分數數線的步驟，建立其它的分數數線。

下面以建立 2 和 3 之間的分數數線為例說明：

先標示整數數線 0、1、2、3、...。

數線上的 $2\frac{1}{4}$ 指的是 $2\frac{1}{4}$ 和 2 的距離是 $\frac{1}{4}$ ， $2\frac{2}{4}$ 指的是 $2\frac{2}{4}$ 和 2 的距離

是 $\frac{2}{4}$ ， $2\frac{3}{4}$ 指的是 $2\frac{3}{4}$ 和 2 的距離是 $\frac{3}{4}$ 。



步驟五：幫助學生建立其它的分數數線。教師應幫助學生認識帶分數的整數部分相當於數線上的整數。數線是國中學習直角坐標的先備知識，也是統整所有數系及幾何的重要基礎，教師應多提供學生利用數線解題的經驗。

2. 提供下面解本題的說明給教師們參考：

- (1) 數線的單位長度都是 1，看到刻度  $\frac{1}{4}$  時，必須想到單位長 1 已經被分割成 4 大格。
- (2) 看到刻度 0 到刻度  $\frac{1}{4}$  間又被等分成 3 小格，必須想到單位長 1 先被平分成 4 大格，每 1 大格又被平分成 3 小格，所以單位長 1 被平分成 12 小格。
- (3) 單位長 1 被平分成 12 小格，所以每一小格的長度都是  $\frac{1}{12}$ 。
- (4) 可以得到( )內要填入  $\frac{5}{12}$ 。

題號	試題代碼					答案	
24	112-M5-A1-24					1	
評量指標	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	<p>「甲、乙、丙三人一同出遊，每人先交 1000 元，約定共同分攤旅遊花費。旅遊時花了交通及門票共 960 元，飲食及雜支共 1500 元，請問每人可以退多少元？」下列哪個算式能算出正確的答案？</p> <p>① <math>1000 - (960 + 1500) \div 3</math></p> <p>② <math>1000 \times 3 - (960 + 1500)</math></p> <p>③ <math>(1000 + 960 + 1500) \div 3</math></p> <p>④ <math>(1000 \times 3 - 960 + 1500) \div 3</math></p>						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：26%
	全 體	0.26	0.26	0.13	0.34	0.01	
	高分組	0.31	0.21	0.05	0.42	0.01	鑑別度：0.09
	低分組	0.23	0.29	0.22	0.25	0.01	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題是三步驟或四步驟的平均問題，要求學生選出解題的算式，評量學生多步驟平均問題列式的能力。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 26%，高分組答對率 31%，低分組答對率 23%，鑑別度 0.09。							
2. 26%的學生選擇正確答案①；26%的學生選擇②；13%的學生選擇③；34%的學生選擇④。							
<b>(三) 選項及學生表現說明</b>							
1. 本題鑑別度為0.09，正確答案為選項①，通過率為26%，顯示近三成的學生已具備多步驟平均問題列式的能力。							

2. 有26%的學生選擇②(低分組有29%)，這些學生可能不具備多步驟平均問題列式的能力，他們沒有注意到題目問的是「每人可以退多少元？」，直接計算出總結餘的錢數。
3. 有13%的學生選擇③(低分組有22%)，這些學生可能不具備多步驟平均問題列式的能力；這些學生也可能不理解題意，直接將題目中的三個數進行相加求平均。
4. 有34%的學生選擇④(低分組有25%)，這些學生可能已具備多步驟平均問題列式的能力，用三人總金額扣除他們所有花費(960+1500)後再均分成3份，但算式中少了括弧。

## 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-05 能做整數四則混合計算(兩步驟)。	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備多步驟平均問題列式的能力。
2. 本題的答案可能不是學生熟悉的解題方式，學生熟悉的列式是「 $(1000 \times 3 - 960 - 1500) \div 3$ 」，題目中沒有該選項。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 整數兩步驟問題引入的順序包含三個部分：

第一部分：用兩個算式記錄解題活動

二年級引入「加、減」及「加(減)、乘」兩步驟問題；

三年級引入「加(減)、除」及「連乘」兩步驟問題；

四年級引入「乘、除」及「連除」兩步驟問題。

第二部分：將兩個算式改記成一個併式，再用一個併式記錄解題活動。

第三部分：先列式，再用逐次減項的記法記錄解題過程。

第二及第三部分是四年級教學的重點。

2. 整數三步驟問題引入的順序包含兩個部分：

第一部分：用兩個算式(其中一個是併式)記錄解題活動

第二部分：將兩個算式(其中一個是併式)改記成一個併式，再用一個併式記錄解題活動。

第三部分：先列式，再用逐次減項的記法記錄解題過程。

3. 建議教師幫助學生用併式列出三步驟問題的算式，並利用逐次減項的記法記錄解題活動。

下面以「小洋原本有 100 元，買了 2 個 25 元的麵包後，爸爸又給他 48 元，請問小洋現在有多少元？」為例，說明三步驟問題的教學流程。

(1) 用一個併式及一個算式記錄解題活動  $100 - 25 \times 2 = 50$ ， $50 + 48 = 98$ 。

答：現在有 98 元。

(2) 將一個併式及一個算式改記成併式的記法將「 $100 - 25 \times 2 = 50$ ， $50 + 48 = 98$ 」

改記成「 $100 - 25 \times 2 + 48 = 98$ 」。

(3) 用併式記錄解題活動  $100 - 25 \times 2 + 48 = 98$ ，答：現在有 98 元。

(4) 用算式填充題來列式  $100 - 25 \times 2 + 48 = ( )$ 。

(5) 先列式，再用逐次減項的記法記錄解題活動  $100 - 25 \times 2 + 48 = ( )$

$100 - 25 \times 2 + 48 = 100 - 50 + 48 = 50 + 48 = 98$ ，答：現在有 98 元。

4. 以逐次減項的記法「 $5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10 = 100 - 10 = 90$ 」為例，

逐次減項是以下解題過程的摘要記法：

$$5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10$$

$$5 \times 20 - 10 = 100 - 10$$

$$100 - 10 = 90$$

因為等號滿足遞移性( $A = B$ ， $B = C$ ， $C = D$ ，所以  $A = D$ )，

所以  $5 \times (12 + 8) - 10 = 90$  逐次減項記法中除了把重複出現的算式「 $5 \times 20 - 10$ 」

和「 $100 - 10$ 」只記一次之外，還把解題過程最重要的部分「因為等號滿足遞移性，所以  $5 \times (12 + 8) - 10 = 90$ 」也省略了。教師可以透過詢問為什麼

「 $5 \times (12 + 8) - 10$ 」的答案是 90，檢查學生是否掌握利用等號遞移性記錄的意義。

5. 學生面對沒有見過的多步驟問題時，只能用多個算式來記錄解題活動，學生解題成功後，教師應要求學生將多個算式改記成併式。以後再遇到相同的問題時，應要求學生先用併式來列式，再利用逐次減項的記法記錄解題活動。儘量要求學生以併式的方法思考與演算，這是代數列式的前置經驗。

題號	試題代碼					答案	
25	112-M5-A1-25					1	
評量指標	5-n-04 能理解因數和倍數。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	<p>下面是甲、乙、丙、丁四人關於因數與倍數的說法。</p> <p>甲說：48 最小的因數是 2 。</p> <p>乙說：48 最大的因數是 48 。</p> <p>丙說：48 最小的倍數是 1 。</p> <p>丁說：48 最大的倍數是 48 。</p> <p>哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有乙正確</p> <p>② 只有甲、乙正確</p> <p>③ 只有丙、丁正確</p> <p>④ 甲、乙、丙、丁都正確</p>						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：49%
	全 體	0.49	0.21	0.15	0.13	0.02	
	高分組	0.80	0.11	0.04	0.03	0.01	鑑別度：0.60
	低分組	0.20	0.29	0.26	0.24	0.02	
<b>一、試題分析</b>							
<b>(一) 評量目標</b>							
本題給定四個人關於因數和倍數的說法，要求學生選出正確的說法，評量學生是否理解因數和倍數的意義。							
<b>(二) 數據說明</b>							
1. 整體通過率 49%，高分組答對率 80%，低分組答對率 20%，鑑別度 0.60。							
2. 49%的學生選擇正確答案①；21%的學生選擇②；15%的學生選擇③；13%的學生選擇④。							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為0.60，正確答案為選項①，通過率為49%，顯示近五成的學生已理解因數和倍數的意義。
2. 有21%的學生選擇②(低分組有29%)，這些學生可能不理解因數和倍數的意義，他們知道48最大的因數是48，但是誤以為48最小的因數是2。
3. 有15%的學生選擇③(低分組有26%)，這些學生可能不理解因數和倍數的意義，他們可能受到關鍵字大和小的影響，或混淆因數和倍數的意義，誤認為48最小的倍數是1，48最大的倍數是48。
4. 有13%的學生選擇④(低分組有24%)，這些學生可能不理解因數和倍數的意義。

### 二、對應能力指標

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-n-08 能理解九九乘法。	5-n-04 能理解因數和倍數。	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不理解因數和倍數的意義。
2. 學生可能受到關鍵字大和小的影響，誤認為最大公因數比較大，最小公倍數比較小。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 多數國小五年級學生已經掌握整數情境的乘除互逆，因此教師可以透過乘法算式「 $5 \times 8 = 40$ ，5、8 以及 40 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數，也可以透過除法算式「 $40 \div 5 = 8 \dots 0$ ，40、5 以及 8 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數。

國小五年級引入因數問題時，給定的數字多在九九乘法的範圍，因此部分教師喜歡透過乘法算式幫助學生認識因數。建議教師必須提供學生利用除法判斷因數的解題經驗，因為當數字變大時，無法直接利用乘法算式找出因數，

以「23 是否為 12581 的因數」為例，學生不易透過乘法算式「 $23 \times ( ) = 12581$ 」來判斷，必須透過除法算式「 $12581 \div 23$ 」來判斷。

2. 以「求 60 的因數和倍數」為例，五年級的教學重點是看著數字 60 找出 60 的因數及倍數，六年級的教學重點是看著 60 質因數分解的算式  $2 \times 2 \times 3 \times 5$  找出 60 的因數及倍數。本基本學習內容限制五年級只能透過嘗試錯誤的方式，尋找兩數的公因數和最大公因數，以及公倍數和最小公倍數。

教師不宜引入短除法求最大公因數及最小公倍數的方法，利用短除法求最大公因數及最小公倍數是六年級的教學重點。

3. 利用嘗試錯誤找出一數所有的因數，或找出兩數的公因數或最大公因數，學生必須進行很多次的乘除計算，要花很多的時間，而且到六年級時，會引入比較有效率的解題策略，例如質因數分解法或短除法。建議教師只要讓學生有一些解題的經驗即可，不必要求學生熟練，也不宜過度評量。

4. 區分「倍數」與「幾倍」的意義。

學生可能混淆「倍數」與「幾倍」的意義，誤認為 2 是 0.1 的倍數。

正確的說法是：2 不是 0.1 的倍數，但 2 是 0.1 的 20 倍。

- (1) 倍數的意義：

數學上只在整數的情境討論因數與倍數，因此，不論透過乘法  $b = a \times q$  或除法  $b \div a = q \dots 0$ ，判斷  $a$  是否為  $b$  的因數時， $a$ 、 $b$  和  $q$  都必須是整數。0.1 不是整數，因此 0.1 不是 2 的因數，2 也不是 0.1 的倍數。

- (2) 幾倍的意義：

$a$  是  $b$  的  $\frac{a}{b}$  倍，指的是將  $b$  視為基準量 1 時，比較量  $a$  是  $\frac{a}{b}$ 。

將 0.1 視為基準量 1，比較量 2 是 20 個 0.1，因此 2 是 0.1 的 20 倍。

## 伍、整體學力表現分析

### 一、不同背景變項學生整體學力表現分析

本計畫同時採用古典測驗理論( classical test theory, CTT )與試題反應理論( item response theory, IRT ) 三參數模式作為試題分析理論基礎，並以三參數模式進行學生能力估計。三參數模式有 a、b、c 三種參數，分別代表鑑別度、難度以及猜測度。學生能力估計值則參考 PISA 與 TIMSS 等國際大型測驗的作法，將估計出來的能力轉換至平均分數 500，標準差 100 的量尺上，再以轉換所得量尺分數進行不同背景變項學生表現分析。本年度數學五年級整體學生學力表現分布狀況，如圖 5-1 所示。

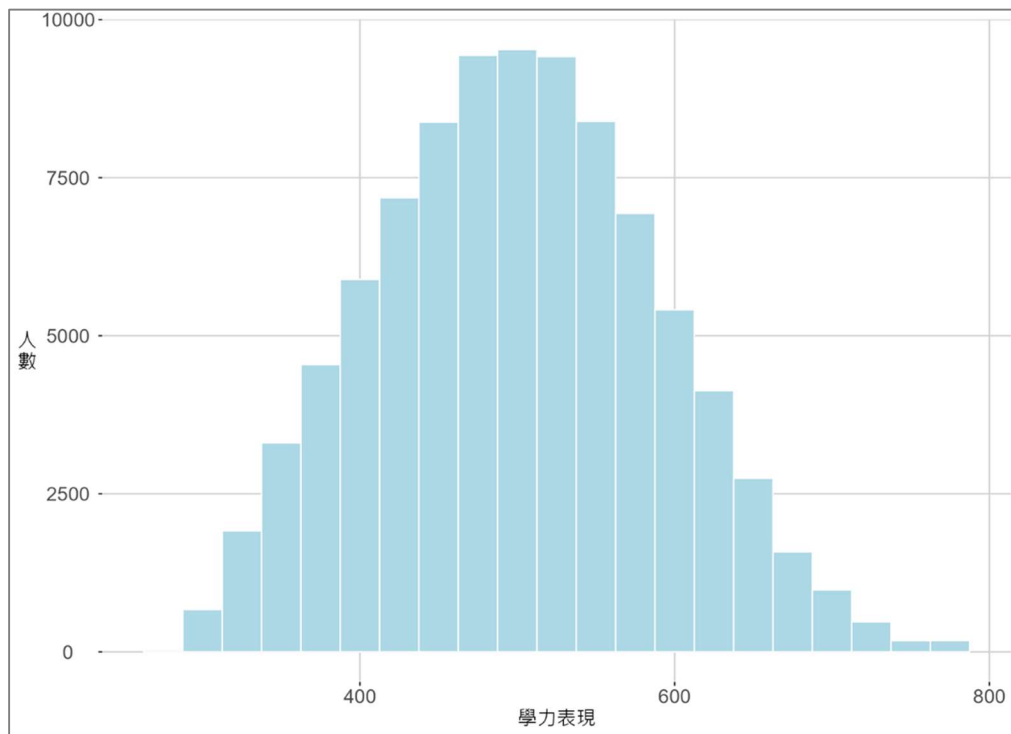


圖 5-1 數學五年級整體學生學力表現分布圖

如圖 5-2，以性別為背景變項進行分析，男生的平均量尺分數為 506（標準差 93），女生平均量尺分數則為 494（標準差 85）；再以不同都市化程度進行背景變項分析，發現「都會核心」及「工商市區」之五年級學生其數學學力檢測表現高於整體平均，「新興市鎮」及「傳統產業市鎮」與整體平均差異不大，「低度發展鄉鎮」、「高齡化鄉鎮」及「偏遠鄉鎮」學生之表現低於整體平均。

按照不同都市化程度學力表現由高至低依序為「都會核心」、「工商市區」、「新興市鎮」、「傳統產業市鎮」、「高齡化鄉鎮」、「低度發展鄉鎮」、「偏遠鄉鎮」，各鄉鎮市區類型參與之學生人數、學力表現平均數及標準差如表 5-1 所示。本年度報考學生人數 99,828 人，排除無效樣本後，總計背景變項分析有效樣本為 91,296 人。

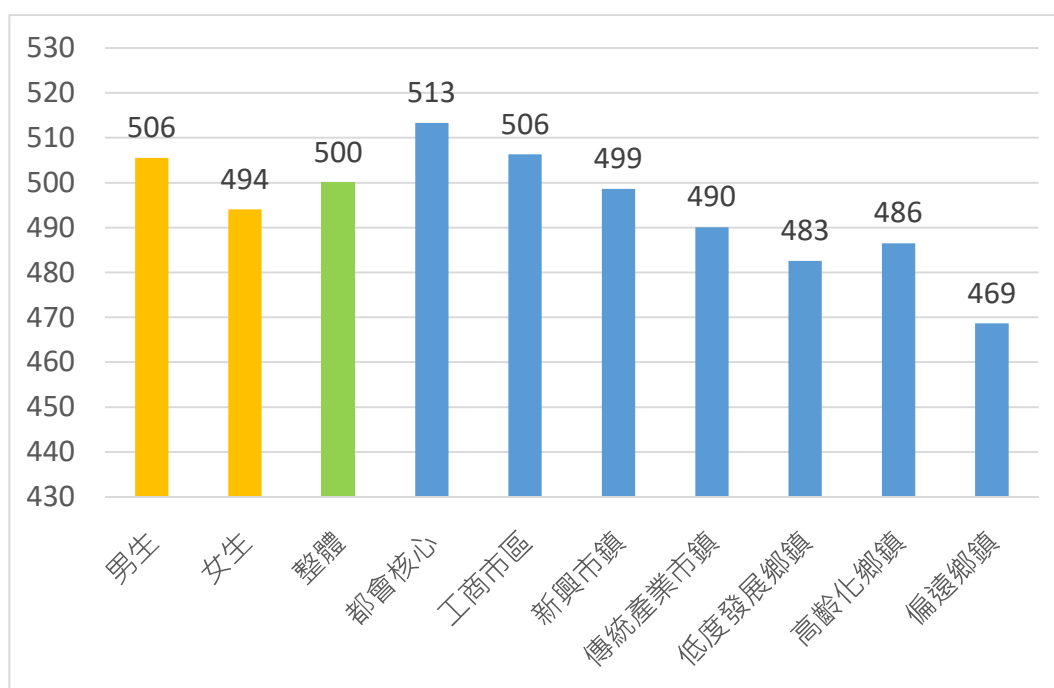


圖 5-2 數學五年級學生不同背景變項學力表現

表 5-1 各鄉鎮市區類型參與之學生人數、學力表現平均數及標準差

	人數	平均數	標準差
整體	91,296	500	90
都會核心	17,787	513	90
工商市區	24,035	506	90
新興市鎮	26,759	499	89
傳統產業市鎮	6,856	490	88
低度發展鄉鎮	11,578	483	88
高齡化鄉鎮	2,568	486	89
偏遠鄉鎮	1,713	469	88

## 二、國民小學五年級學生於不同能力指標之答對率表現

藉由將「國民小學數學五年級學生學習能力檢測」題號，對應之九年一貫課程綱要能力指標和答對率進行交叉對照，可更明確檢視學生表現較優異和有待加強之處，相關整理如表 5-2 所示。

表 5-2-1 數與計算能力指標及其答對率之交叉對照表

答對率%	題號	能力指標
91~100		
81~90		
71~80	5	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。
61~70	1	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。
	4	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。
51~60	8	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。
	18	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。
41~50	10	4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。
	15	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。
	16	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。
	17	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。
31~40	25	5-n-04 能理解因數和倍數。
	9	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。
	20	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。
21~30	22	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。
	23	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。
11~20	24	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。
0~10		

表 5-2-2 量與實測能力指標及其答對率之交叉對照表

答對率%	題號	能力指標
91~100		
81~90		
71~80		
61~70	6	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。
	12	4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。
51~60		
41~50		
31~40		
21~30		
11~20		
0~10		

表 5-2-3 幾何能力指標及其答對率之交叉對照表

答對率%	題號	能力指標
91~100		
81~90		
71~80	2	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。
61~70		
51~60	14	4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-n-18)
	11	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。
41~50	19	5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。
	21	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。
31~40	13	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-n-18)
21~30		
11~20		
0~10		

表 5-2-4 代數能力指標及其答對率之交叉對照表

答對率%	題號	能力指標
91~100		
81~90		
71~80	3	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。
61~70		
51~60	7	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。
41~50		
31~40		
21~30		
11~20		
0~10		

## 陸、整體教學建議

### 一、學生整體表現

由表 6-1 觀之，本次測驗全體學生的平均通過率是 50%。從學生在各評量指標-知識向度與認知向度的解題表現來看，其中，在知識向度方面，學生在量與實測向度及代數向度的平均通過率最高(65%)，其次是幾何向度(52%)，而在數與計算向度的平均通過率最低(46%)；在認知向度方面，學生在概念理解向度的平均通過率最高(54%)，在解題思考向度平均通過率最低(46%)。進一步分析資料，學生在幾何\*概念理解向度的平均通過率最佳(全：73%，高分組：93%，低分組：48%)；學生在數與計算\*解題思考向度的平均通過率最低(全：31%，高分組：48%，低分組：20%)。

此結果顯示針對五年級學生的數學課室教學，教師對於建立學生數與計算的概念，以及解題思考能力，除重視基本概念之講解說明與程序運算的練習之外，亦要提供實物讓學生具體操作，並提升學生更高階段的學習成效。

表 6-1 整體學生及高分組、低分組學生於各評量向度之通過率

五	概念理解			程序執行			解題思考			小計		
	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率	分組	通過率	
數與計算	4、5、 10、17、 18、24、 25	高	0.74	1、8、 15、 16、23	高	0.74	9、20、 22	高	0.48	共 15 題	高	0.69
		全	0.51		全	0.48		全	0.31		全	0.46
		低	0.28		低	0.25		低	0.20		低	0.25
量與實測				6	高	0.89	12	高	0.90	共 2 題	高	0.90
					全	0.64		全	0.66		全	0.65
					低	0.33		低	0.40		低	0.37
幾何	2	高	0.93				11、13、 14、19、 21	高	0.75	共 6 題	高	0.78
		全	0.73					全	0.48		全	0.52
		低	0.48					低	0.24		低	0.28

五	概念理解			程序執行			解題思考			小計		
	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率		分組	通過率
代數				3	高	0.94	7	高	0.85	共 2 題	高	0.90
					全	0.71		全	0.65			
					低	0.40		低	0.36			
小計	共 8 題	高	0.77	共 7 題	高	0.79	共 10 題	高	0.69	共 25 題	高	0.74
		全	0.54		全	0.53		全	0.46		全	0.50
		低	0.31		低	0.28		低	0.25		低	0.28

## 二、對學習待加強學生的觀察

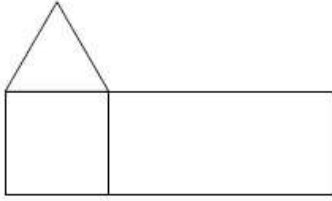
本次測驗對象是國小五年級的學生，測驗的內容是以九年一貫課程綱要-數學領域中所羅列之五年級學生應學習的分年細目作為命題依據。因此，高、低分組學生在這些題目的答對率上應相距不遠；但是，由上表 6-1 呈現的數據發現，有些題目高分組學生與低分組學生的通過率落差很大。因此，我們特別針對鑑別度較高的試題(第 14、15、17、18、25 題)再做進一步的分析與討論，提供老師作為教學上的參考。

### (一) 複合圖形的面積

#### 1. 評量目標

第 14 題(試題如下)對應的學習內容是「4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-n-18)」

妹妹拿出了一個正三角形、一個正方形及一個長方形的色紙貼成下面的圖形。



已知正三角形周長是 36 公分，長方形較長一邊的長是 26 公分，請問長方形面積是多少平方公分？

- ① 76
- ② 234
- ③ 312
- ④ 936

本題給定有一邊等長的三角形、正方形和長方形拼成的複合圖形，要求學生求出長方形的面積，評量學生利用長方形面積公式解題的能力。

本題是四年級的教學內容，因為有些版本是四年級下學期最後三個單元的教材，因此四年級不評量，改至五年級來評量。

## 2. 試題分析

- (1) 本題鑑別度為0.62，正確答案為選項③，通過率為54%，顯示超過五成的學生已具備利用長方形面積公式解題的能力。其中高分組的通過率是85%、低分組的通過率是24%，顯示八成五高分組的學生已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是低分組的學生尚未具備利用長方形面積公式解題的能力。
- (2) 有10%的學生選擇選項①(高分組有2%、低分組有19%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是他們誤解題意，算出長方形的周長，這些學生可能的算法如下： $36 \div 3 = 12$ ， $(12 + 26) \times 2 = 76$ 。
- (3) 有16%的學生選擇選項②(高分組有6%、低分組有24%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是他們誤解題意，將正三角形周長誤看成正方形周長，這些學生可能的算法如下： $36 \div 4 = 9$ ， $26 \times 9 = 234$ 。

(4) 有20%的學生選擇選項④(高分組有6%、低分組有33%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是他不理解題意，直接將題目給定的兩數相乘當成答案，他們可能的算法如下： $36 \times 26 = 936$ 。

### 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1) 學生常混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義，教師應多提供學生利用長度單位「1公分」或「1公尺」實測的經驗，例如50個「1公分」接起來，剛好和甲繩一樣長，可以稱甲繩的長度是50公分；也應該多提供學生利用面積單位「1平方公分」或「1平方公尺」實測的經驗，例如將30個「1平方公分」合起來，剛好和色紙一樣大，就可以稱色紙的面積是30平方公分。

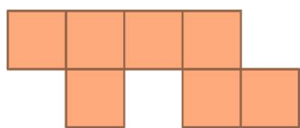
「1公分」和「1平方公分」是兩種不相同的量，當學生有豐富的長度及面積單位實測的經驗，比較不會混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義。

(2) 如果學生混淆正方形及長方形周長及面積公式，教師可以要求學生熟記面積公式即可，評量周長時，學生只要理解正方形邊長、長方形長邊、寬邊，以及圖形周長的意義，並畫出正方形及長方形的圖形，就能順利的解題。

(3) 以「長5公分、寬3公分長方形的面積是多少平方公分？」為例，說明如何幫助學生理解長邊及寬邊都是整數公分的長方形面積公式。

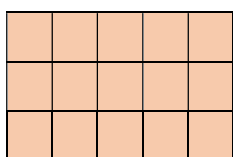
步驟一：建立單位面積 1 平方公分的概念

例如知道下圖是由 7 個 1 平方公分合起來的，所以下圖的面積是 7 平方公分。



步驟二：利用 1 平方公分的方瓦覆蓋給定的長方形，並利用乘法算式算出有多少個 1 平方公分

例如下圖是用 1 平方公分方瓦覆蓋的長方形，要求學生用一排有幾個 1 平方公分，一共有幾排的方式，利用乘法「 $5 \times 3 = 15$ 」算出面積是 15 平方公分。



步驟三：理解被乘數、乘數和長邊、寬邊的公分數之間的關係。

例如長邊是 5 公分，剛好有 5 個 1 平方公分的方瓦，也就是一排有 5 個 1 平方公分，寬邊是 3 公分，剛好有 3 個 1 平方公分的方瓦，也就是一共有 3 排。

步驟四：透過長邊和寬邊的公分數，直接用乘法算出單位面積的個數，並形成長乘以寬面積公式算法的共識。

長邊是 5 公分，表示一排有 5 個 1 平方公分，寬邊是 3 公分，表示一共有 3 排，因此可以透過長邊及寬邊的公分數，利用一排有幾個、有幾排的方式算出長方形的面積，並得到「長方形面積 = 長邊的公分數 × 寬邊的公分數」的結果。

當學生有一些利用上述公式解題的經驗後，教師可以將上述公式中「長邊的公分數 × 寬邊的公分數」簡記為「長邊 × 寬邊」或「長 × 寬」。

## (二) 整數多步驟四則混合計算

### 1. 評量目標

第 15 題(試題如下)對應的學習內容是「5-n-03 能熟練整數四則混合計算。」

算算看， $308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 = ?$

① 196

② 260

③ 1800

④ 4200

本題是多步驟的四則混合計算問題，要求學生算出答案，評量學生多步驟整數四則混合計算的能力。

四年級已引入兩步驟計算問題，但是只會用到①括號先算、②先乘除後加減、③由左往右算，這三個約定其中的一個約定，五年級將整數四則混合計算的步驟擴充至多步驟。

## 2. 試題分析

(1) 本題鑑別度為0.58，正確答案為選項①，通過率為41%，顯示超過四成的學生已具備多步驟整數四則混合計算的能力。其中高分組的通過率是73%、低分組的通過率是16%，顯示只有超過七成高分組的學生已具備多步驟整數四則混合計算的能力，但是低分組的學生尚未具備多步驟整數四則混合計算的能力。

(2) 有23%的學生選擇選項②(高分組有15%、低分組有27%)，這些學生可能不具備多步驟整數四則混合計算的能力，他們知道括號要先算，但括號內有加和除的運算，學生忘記要先除後加，而直接由左往右算，但是算出括號內的答案後，他們又記得先乘除後加減的約定，這些學生可能的計算過程如下：

$$\begin{aligned} & 308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 \\ &= 308 - 8 \times (15 \div 5) \times 2 \\ &= 308 - 8 \times 3 \times 2 \\ &= 308 - 24 \times 2 \\ &= 308 - 48 \\ &= 260 \end{aligned}$$

(3) 有25%的學生選擇選項③(高分組有6%、低分組有43%)，這些學生可能不具備多步驟整數四則混合計算的能力，他們知道括號要先算，但括號內有加有除，他直接由左往右算，但是算出括號內的答案後，接著又由左往右算，這些學生可能的計算過程如下：

$$\begin{aligned} & 308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 \\ &= 308 - 8 \times (15 \div 5) \times 2 \\ &= 308 - 8 \times 3 \times 2 \\ &= 300 \times 3 \times 2 \\ &= 900 \times 2 \\ &= 1800 \end{aligned}$$

(4) 有10%的學生選擇選項④(高分組有5%、低分組有14%)，這些學生可能不具備多步驟整數四則混合計算的能力，他們在括號內的計算過程記得先乘除後加減的約定，但在算出括號內的答案後，又忘記先乘除後加減的約定，由左往右算算出答案，這些學生可能的計算過程如下：

$$\begin{aligned} & 308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 \\ &= 308 - 8 \times (5 + 2) \times 2 \\ &= 308 - 8 \times 7 \times 2 \\ &= 300 \times 7 \times 2 \\ &= 2100 \times 2 \\ &= 4200 \end{aligned}$$

(5) 低分組學生的通過率只有16%，這些學生可能已熟記「括號先算」的約定，但是常忘記「先乘除後加減」的約定，習慣由左往右算。

### 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1) 四年級兩步驟計算問題中，只會用到①括號先算、②先乘除後加減、③由左往右算，這三個約定其中的一個約定。

建議教師將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題。

第一類：有括號的兩步驟計算問題

括號的部分要先算，簡稱為括號先算。

第二類：沒有括號的兩步驟計算問題

a. 算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部分。簡稱為先乘除後加減。

b. 算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。簡稱為由左往右算。

(2) 五年級引入三步驟計算問題，學生只要知道第一步要算什麼，三步驟計算問題，就能簡化成兩步驟計算問題。四年級將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題的約定，也能適用於三步驟問題及更多步驟的問題。

第一類：有括號的三步驟計算問題

括號的部分要先算，簡稱為括號先算。

第二類：沒有括號的三步驟計算問題

a. 算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部分。簡稱為先乘除後加減。

b. 算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。簡稱為由左往右算。

### (三) 商為小數的除法直式計算

#### 1. 評量目標

第 17 題(試題如下)對應的學習內容是「5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。」

左圖是「 $53 \div 7$ 」求商到小數第二位的直式計算。  
右圖是「 $53 \div 7$ 」求商到小數第三位的直式計算。

$\begin{array}{r} 7.57 \\ 7 \overline{)53} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 40 \phantom{00} \\ \underline{35} \phantom{00} \\ 50 \phantom{00} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 1 \phantom{00} \end{array}$	$\begin{array}{r} 7.571 \\ 7 \overline{)53} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 40 \phantom{00} \\ \underline{35} \phantom{00} \\ 50 \phantom{00} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 10 \phantom{00} \\ \underline{7} \phantom{00} \\ 3 \phantom{00} \end{array}$
--	--

右圖中的除法直式將左圖除法直式下面的 1 後面補一個 0 繼續除，請問表示什麼意思？

- ① 把 1 個 10 換成 10 個 1
- ② 把 1 個 1 換成 10 個 0.1
- ③ 把 1 個 0.1 換成 10 個 0.01
- ④ 把 1 個 0.01 換成 10 個 0.001

本題給定整數除以整數且商為二位小數及三位小數的直式計算過程，要求學生選出商由二位小數改記成三位小數時餘數後面補 0 的理由，評量學生整數除以整數商是三位小數直式計算的能力。

## 2. 試題分析

- (1) 本題鑑別度為0.61，正確答案為選項④，通過率為44%，顯示超過四成的學生已具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力。其中高分組的通過率是77%、低分組的通過率是16%，顯示接近八成高分組的學生已具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，但是低分組的學生尚未具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力。
- (2) 有15%的學生選擇選項①(高分組有3%、低分組有26%)，這些學生可能不具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，誤認為百分位的1是1個⑩。
- (3) 有27%的學生選擇選項②(高分組有14%、低分組有35%)，這些學生可能不具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，誤認為百分位的1是1個①。
- (4) 有14%的學生選擇選項③(高分組有6%、低分組有22%)，這些學生可能不具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，誤認為百分位的1是1個0.1。
- (5) 本題低分組學生的通過率只有16%，這些學生可能已掌握整數除以整數商是整數的程序性計算過程，但是無法掌握計算過程中位值的意義，無法延伸商是整數的計算過程至商是小數的情境。

## 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

- (1) 教師可以先布小數除以整數，商數是小數且有餘數的問題，例如：「 $17.5 \div 4$ 」。  
再布整數除以整數，商數是小數且有餘數的等分除問題，例如：「 $17 \div 4$ 」。  
「 $17.5 \div 4$ 」的被除數是一位小數，學生較容易類比整數除法直式計算，將整數位的餘數1轉換成10個0.1，再加上原有的0.5後繼續運算。而「 $17 \div 4$ 」的被除數是整數，學生不易自行加上小數點，再將整數位的餘數1轉換成10個0.1。
- (2) 以「將231.8公升果汁，平分裝成14瓶，每瓶最多可以裝幾公升，剩下幾公升？(商數算到小數第一位)」為例，說明如何幫助學生解小數除以整數除法直式計算。

步驟一：將 231.8 分解為 2 個「100」、3 個「10」、1 個「1」和 8 個「0.1」。

步驟二：先分 2 個「100」，2 個「100」平分成 14 份不夠分；將 2 個「100」換成 20 個「10」，加上原有的 3 個「10」，合起來是 23 個「10」。23 個「10」平分成 14 份，每份是 1 個「10」。

步驟三：還剩下 9 個「10」不夠分，9 個「10」再換成 90 個「1」，加上原有的 1 個「1」，合起來是 91 個「1」。

步驟四：91 個「1」平分成 14 份，每份是 6 個「1」，分掉 84 個「1」。

步驟五：還剩下 7 個「1」不夠分，7 個「1」換成 70 個「0.1」，加上原有的 8 個「0.1」，合起來是 78 個「0.1」。

步驟六：78 個「0.1」平分成 14 份，每份是 5 個「0.1」，分掉 70 個「0.1」。

步驟七：剩下 8 個「0.1」。

步驟八：每瓶分到 1 個「10」、6 個「1」和 5 個「0.1」，剩下 8 個「0.1」，也就是每瓶分到 16.5 公升，剩下 0.8 公升。

上述的解題活動，可以使用下列直式來記錄：

	1 6. 5	⇒ 步驟八
1 4	) 2 3 1. 8	⇒ 步驟一
	1 4	⇒ 步驟二
	-----	
	9 1	⇒ 步驟三
	8 4	⇒ 步驟四
	-----	
	7 8	⇒ 步驟五
	7 0	⇒ 步驟六
	-----	
	8	⇒ 步驟七

(3) 最簡分數的分母是  $2^m \times 5^n$  的樣式，其中  $m$ 、 $n$  都是非負整數，才能轉換成有限小數。

例如： $\frac{3}{8}$  的分母是  $2^3 \times 5^0$ ，可以透過下列算式將  $\frac{3}{8}$  改記成有限小數。

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{8 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{10 \times 10 \times 10} = \frac{375}{1000} = 0.375。$$

(4) 建議教師先幫助學生澄清整數情境等分除法解題的意義，再幫助學生將整數情境的除法問題延伸到小數情境。

a. 整數情境等分問題解題的意義：有兩種解讀 5983 元的方式。

第一種：以 1 元為單位的合成方式，將 5983 元視為 5000 元、900 元、80 元和 3 元的合成結果。

第二種：以 1 千元、1 百元、十元及一元四個單位的合成方式，將 5983 元視為 5 張 1 千元、9 張 1 百元、8 個十元和 3 個一元的合成結果。

將 5983 元視為 5 張 1 千元、9 張 1 百元、8 個十元和 3 個一元的合成結果，可以將要運算的數字變小，方便計算。

以問題「將 5983 元平分給 72 人，每人最多可以分到幾元，剩下多少元？」為例：可以將 5983 元視為 5 張千元鈔票、9 張百元鈔票、8 個十元硬幣、3 個一元硬幣的合成結果：先分千元鈔票，5 張千元鈔票平分給 72 個人不夠分。換成百元鈔票，5 張千元鈔票可以換 50 張百元鈔票，加上原有的 9 張百元鈔票，合起來有 59 張百元鈔票。59 張百元鈔票平分給 72 個人不夠分，再換成十元硬幣，59 張百元鈔票可以換成 590 個十元硬幣，加上原有的 8 個十元硬幣，合起來有 598 個十元硬幣。598 個十元硬幣平分給 72 個人，每個人分到 8 個十元硬幣。還剩下 22 個十元硬幣不夠分，再換成一元硬幣，22 個十元硬幣可以換成 220 個一元硬幣，加上原有的 3 個一元硬幣，合起來有 223 個一元硬幣。223 個一元硬幣平分給 72 個人，每個人分得 3 個一元硬幣，還剩下 7 個一元硬幣。

因此，每一個人分到 8 個十元硬幣和 3 個一元硬幣，還剩下 7 個一元硬幣，也就是說，每個人分到 83 元，剩下 7 元。

上述的解題活動可以使用下列直式來記錄：

千百十個	83	→ 每人先分到8個十元硬幣，再分到3個一元硬幣。
72	5983	→ 每人先分到8個十元硬幣，用掉576個十元硬幣。
	-576	
	223	→ 剩下22個十元硬幣，換成220個一元硬幣，和題目裡的3個一元硬幣合起來有223個一元硬幣。
	-216	→ 每人再分到3個一元硬幣，用掉216個一元硬幣。
	7	→ 剩下7個一元硬幣

b. 小數情境等分除問題解題的意義：

下面以「 $31.8 \div 5$ 」為例，說明小數除以整數除法算則解題的意義。

建議教師依下列步驟幫助學生解題。

步驟一：將 31.8 分解為 3 個「10」、1 個「1」和 8 個「0.1」。

步驟二：先分 3 個「10」，3 個「10」平分成 5 份不夠分；將 3 個「10」換成 30 個「1」，加上原有的 1 個「1」，合起來是 31 個「1」。31 個「1」平分成 5 份，每份是 6 個「1」。

步驟三：還剩下 1 個「1」不夠分，1 個「1」再換成 10 個「0.1」，加上原有的 8 個「0.1」，合起來是 18 個「0.1」。

步驟四：18 個「0.1」平分成 5 份，每份是 3 個「0.1」，分掉 15 個「0.1」。

步驟五：還剩下 3 個「0.1」不夠分，3 個「0.1」換成 30 個「0.01」。

30 個「0.01」平分成 5 份，每份是 6 個「0.01」。

每瓶分到 6 個「1」、3 個「0.1」和 6 個「0.01」，也就是每瓶分到 6.36 公升。

上述的解題活動可以使用下列直式來記錄：

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">十個 位</td> <td style="text-align: center;">十個 位</td> <td style="text-align: center;">十個 位</td> <td style="text-align: center;">十個 位</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">十個 位</td> <td style="text-align: center;">十個 位</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">十個 位</td> <td style="text-align: center;">十個 位</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">十個 位</td> <td style="text-align: center;">十個 位</td> </tr> </table>	十個 位	十個 位	十個 位	十個 位			十個 位	十個 位			十個 位	十個 位			十個 位	十個 位	$\begin{array}{r} 6.36 \\ \hline 5 \overline{) 31.8} \\ \underline{-30} \phantom{0} \\ 18 \\ \underline{-15} \\ 30 \\ \underline{-30} \\ 0 \end{array}$	<p>→ 每人先分到 6 個「1」，再分到 3 個「0.1」，最後分到 6 個「0.01」。合起來是 6.36。</p> <p>→ 31 個「1」平分成 5 份，每份是 6 個「1」，分掉 30 個「1」，剩下 1 個「1」。換成 10 個「0.1」，和題目裡的 8 個「0.1」合起來是 18 個「0.1」。</p> <p>→ 18 個「0.1」，平分成 5 份，每份是 3 個「0.1」，分掉 15 個「0.1」，剩下 3 個「0.1」，換成 30 個「0.01」。</p> <p>→ 30 個「0.01」平分成 5 份，每份是 6 個「0.01」，分掉 30 個「0.01」。</p> <p>→ 剩下 0 個「0.01」。</p>
十個 位	十個 位	十個 位	十個 位															
		十個 位	十個 位															
		十個 位	十個 位															
		十個 位	十個 位															

#### (四) 分數及小數的大小比較

##### 1. 評量目標

第 18 題(試題如下)對應的學習內容是「4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。」

「1.99、 $2\frac{3}{10}$ 、 $\frac{14}{5}$ 、2.5」，這四個數中，哪個數最大？

① 1.99

②  $2\frac{3}{10}$

③  $\frac{14}{5}$

④ 2.5

本題給定一位小數、二位小數、假分數及帶分數等四個數，要求學生選出最大的數，評量學生是否具備分數與小數互換及比較大小的能力。

本題是三年級的教學內容，因為有些版本是是四年級下學期最後三個單元的教材，因此四年級不評量，改至五年級來評量。

## 2. 試題分析

(1) 本題鑑別度為0.60，正確答案為選項③，通過率為58%，顯示近六成的學生已具備分數與小數互換及比較大小的能力。其中高分組的通過率是87%、低分組的通過率是27%，顯示近九成高分組的學生已具備分數與小數互換及比較大小的能力，但是低分組的學生尚未具備分數與小數互換及比較大小的能力。

(2) 本題有兩種解題的方法：

第一種：都轉換成小數來比較

$$2\frac{3}{10} = 2.3$$

四年級學生只能透過等值分數 $\frac{14}{5} = \frac{28}{10}$ ，將 $\frac{14}{5}$ 轉換成小數2.8。

五年級學生多了一種解題方法，透過除法 $14 \div 5$ ，將 $\frac{14}{5}$ 轉換成小數2.8。

$1.99 < 2.3 < 2.5 < 2.8$ ，可以得到2.8最大，也就是 $\frac{14}{5}$ 最大。

第二種：都轉換成分數來比較

$$1.99 = 1 + \frac{99}{100} = \frac{199}{100}$$

$$2\frac{3}{10} = 2 + \frac{3}{10} = \frac{23}{10} = \frac{230}{100}$$

$$\frac{14}{5} = \frac{28}{10} = \frac{280}{100}$$

$$2.5 = 2 + \frac{5}{10} = \frac{25}{10} = \frac{250}{100}$$

$$\frac{199}{100} < \frac{230}{100} < \frac{250}{100} < \frac{280}{100}, \text{ 可以得到 } \frac{280}{100} \text{ 最大, 也就是 } \frac{14}{5} \text{ 最大。}$$

(3) 有8%的學生選擇選項①(高分組有2%、低分組有16%)，這些學生可能不具備分數與小數互換及比較大小的能力，他們可能不理會小數點，也不理解帶分數的意義，或認為分數一定比整數小，直接比較整數199、2和25，得到1.99最大的答案。

(4) 有10%的學生選擇選項②(高分組有1%、低分組有22%)，這些學生可能不具備分數與小數互換及比較大小的能力，誤認為帶分數最大。

(5) 有24%的學生選擇選項④(高分組有9%、低分組有34%)，這些學生可能不具備分數與小數互換及比較大小的能力；他們可能已具備比較小數大小的能力，但是無

法將 $\frac{14}{5}$ 轉換成小數，因此只比較1.99、2.3和2.5的大小，得到2.5最大的答案。

### 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1) 以 $\frac{3}{4}$ 為例，有兩種將分數改記成小數的方法：

a. 利用除法直式算則來解題。例如： $\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0.75$ 。

b. 透過約分或擴分，將分母改記成10的次方後，再轉換成小數。

$$\text{例如：} \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75。$$

(2) 最簡分數的分母是 $2^m \times 5^n$ 的樣式，其中  $m$ 、 $n$  都是非負整數，才能轉換成有限小數。

例如： $\frac{3}{8}$  的分母是 $2^3 \times 5^0$ ，可以透過下列算式將 $\frac{3}{8}$ 改記成有限小數。

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{8 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{10 \times 10 \times 10} = \frac{375}{1000} = 0.375。$$

(3) 學生應熟練分母為2、4、5、8、10、100之真分數所對應的小數值。

例如： $\frac{1}{8} = 0.125$ ， $\frac{3}{8} = 0.375$ ， $\frac{5}{8} = 0.625$ ， $\frac{7}{8} = 0.875$ 。

### (五) 整數多步驟四則混合計算

#### 1. 評量目標

第 25 題(試題如下)對應的學習內容是「5-n-04 能理解因數和倍數。」

下面是甲、乙、丙、丁四人關於因數與倍數的說法。

甲說：48 最小的因數是 2。

乙說：48 最大的因數是 48。

丙說：48 最小的倍數是 1。

丁說：48 最大的倍數是 48。

哪些人的說法正確？

① 只有乙正確

② 只有甲、乙正確

③ 只有丙、丁正確

④ 甲、乙、丙、丁都正確

本題給定四個人關於因數和倍數的說法，要求學生選出正確的說法，評量學生是否理解因數和倍數的意義。

## 2. 試題分析

- (1) 本題鑑別度為 0.60，正確答案為選項①，通過率為 49%，顯示近五成的學生已理解因數和倍數的意義。其中高分組的通過率是 80%、低分組的通過率是 20%，顯示八成高分組的學生已理解因數和倍數的意義，但是低分組的學生尚未理解因數和倍數的意義。
- (2) 有 21%的學生選擇選項②(高分組有 11%、低分組有 29%)，這些學生可能不理解因數和倍數的意義，他們知道 48 最大的因數是 48，但是誤以為 48 最小的因數是 2。
- (3) 有 15%的學生選擇選項③(高分組有 4%、低分組有 26%)，這些學生可能不理解因數和倍數的意義，他們可能受到關鍵字大和小的影響，或混淆因數和倍數的意義，誤認為 48 最小的倍數是 1，48 最大的倍數是 48。
- (4) 有 13%的學生選擇選項④(高分組有 3%、低分組有 24%)，這些學生可能不理解因數和倍數的意義。

## 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

- (1) 多數國小五年級學生已經掌握整數情境的乘除互逆，因此教師可以透過乘法算式「 $5 \times 8 = 40$ ，5、8 以及 40 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數，也可以透過除法算式「 $40 \div 5 = 8 \dots 0$ ，40、5 以及 8 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數。  
國小五年級引入因數問題時，給定的數字多在九九乘法的範圍，因此部分教師喜歡透過乘法算式幫助學生認識因數。建議教師必須提供學生利用除法判斷因數的解題經驗，因為當數字變大時，無法直接利用乘法算式找出因數，以「23 是否為 12581 的因數」為例，學生不易透過乘法算式「 $23 \times ( ) = 12581$ 」來判斷，必須透過除法算式「 $12581 \div 23$ 」來判斷。
- (2) 以「求 60 的因數和倍數」為例，五年級的教學重點是看著數字 60 找出 60 的因數及倍數，六年級的教學重點是看著 60 質因數分解的算式  $2 \times 2 \times 3 \times 5$  找出 60 的因數及倍數。本基本學習內容限制五年級只能透過嘗試錯誤的方式，尋找兩數的公因數和最大公因數，以及公倍數和最小公倍數。

教師不宜引入短除法求最大公因數及最小公倍數的方法，利用短除法求最大公因數及最小公倍數是六年級的教學重點。

- (3) 利用嘗試錯誤找出一數所有的因數，或找出兩數的公因數或最大公因數，學生必須進行很多次的乘除計算，要花很多的時間，而且到六年級時，會引入比較有效率的解題策略，例如質因數分解法或短除法。建議教師只要讓學生有一些解題的經驗即可，不必要求學生熟練，也不宜過度評量。

- (4) 區分「倍數」與「幾倍」的意義。

學生可能混淆「倍數」與「幾倍」的意義，誤認為 2 是 0.1 的倍數。

正確的說法是：2 不是 0.1 的倍數，但 2 是 0.1 的 20 倍。

a. 倍數的意義：

數學上只在整數的情境討論因數與倍數，因此，不論透過乘法  $b = a \times q$  或除法  $b \div a = q \dots 0$ ，判斷  $a$  是否為  $b$  的因數時， $a$ 、 $b$  和  $q$  都必須是整數。0.1 不是整數，因此 0.1 不是 2 的因數，2 也不是 0.1 的倍數。

b. 幾倍的意義：

$a$  是  $b$  的  $\frac{a}{b}$  倍，指的是將  $b$  視為基準量 1 時，比較量  $a$  是  $\frac{a}{b}$ 。

將 0.1 視為基準量 1，比較量 2 是 20 個 0.1，因此 2 是 0.1 的 20 倍。

## 112 年學力檢測測驗題本 數學五年級

作答注意事項：

各位同學：

你們好。

這是一份數學的試題，總共 25 題。

測驗時間為 40 分鐘。

每一題請選出一個最合適的答案，並用 2B 鉛筆在答案卡畫記，不可超出格線外，如果需要修改答案，請使用橡皮擦擦拭乾淨，再重新畫記。

畫記說明：

當你想選擇的答案為④時，正確畫記為 ① ② ③ ●

其他事項：

★ 每一題都要回答。

★ 試題如有錯誤，請立即告知老師。

學 校	
班 級	
座 號	
姓 名	

1. 下列哪個分數和  $\frac{18}{15}$  不一樣大?

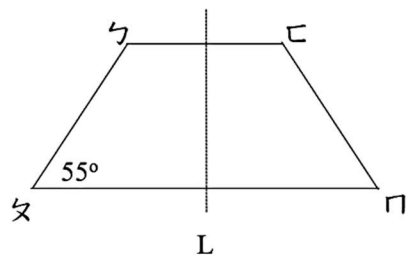
①  $\frac{6}{5}$

②  $\frac{40}{35}$

③  $\frac{90}{75}$

④  $\frac{96}{80}$

2. 下圖是一個線對稱圖形，以  $L$  為對稱軸，角  $\square$  是多少度？



① 55

② 125

③ 145

④ 305

3. 算算看， $4568000 \div 125 \div 8 = ?$

- ① 4568
- ② 36544
- ③ 45680
- ④ 571000

4. 把一張長方形紙全部剪成一樣大的正方形，每個正方形的邊長都是整數公分，可以有很多不同的剪法。  
如果剪出的正方形邊長最長是 18 公分，其他剪法剪出的正方形邊長不可能是多少公分？

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 6

5. 甲 =  $9.98 \times 1.001$ 、乙 =  $9.98 \times 0.9988$ 、丙 =  $9.98 \times 1$ 。  
下列關於甲、乙、丙大小順序，何者正確？

- ① 甲 > 乙 > 丙
- ② 甲 > 丙 > 乙
- ③ 乙 > 丙 > 甲
- ④ 丙 > 乙 > 甲

6. 姐姐播放的祈福音樂一段長 14 分鐘 31 秒鐘，她連續播放了 8 次才停止。請問姐姐共播放了多久的時間？

- ① 1 小時 14 分鐘 48 秒鐘
- ② 1 小時 16 分鐘 8 秒鐘
- ③ 1 小時 54 分鐘 48 秒鐘
- ④ 1 小時 56 分鐘 8 秒鐘

7. 已知「甲 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7」。

請問「 $22.2 + 33.3 + 44.4 + 55.5 + 66.6 + 77.7$ 」是甲的多少倍？

- ① 11.1
- ② 22.2
- ③ 27
- ④ 100

8. 算算看，「 $820000 \div 8000$ 」的商及餘數分別是多少？

- ① 商是 12 ，餘數是 4
- ② 商是 12 ，餘數是 4000
- ③ 商是 102 ，餘數是 4
- ④ 商是 102 ，餘數是 4000

9. 請問  $\frac{3}{6}$ 、 $\frac{4}{9}$ 、 $\frac{6}{11}$  三個分數中，最大分數和最小分數的和是多少？

①  $\frac{9}{17}$

②  $\frac{17}{18}$

③  $\frac{69}{66}$

④  $\frac{98}{99}$

10. 小數部分有兩個數字的小數稱為二位小數，例如：2.36、18.03、235.47 都是二位小數。

弟弟用四張數字卡  $\boxed{3}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{6}$ 、 $\boxed{9}$  排出最大的二位小數，請問十分位應該放哪張數字卡？

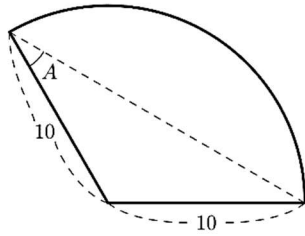
① 3

② 5

③ 6

④ 9

11. 下圖是一個  $\frac{1}{3}$  圓的扇形，請問角  $A$  是多少度？



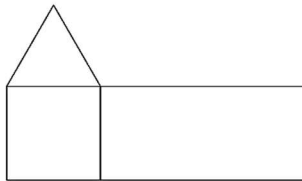
(單位：公分)

- ① 20
  - ② 30
  - ③ 60
  - ④ 120
12. 妹妹下午 9 時 15 分上床睡覺，一直睡到隔天上午 6 時 55 分起床。  
請問妹妹睡了多久？
- ① 2 小時 20 分鐘
  - ② 9 小時
  - ③ 9 小時 40 分鐘
  - ④ 16 小時 10 分鐘

13. 平行四邊形乙和平行四邊形丙都不是長方形。  
長方形甲的長是 18 公分、寬是 12 公分；  
平行四邊形乙的底邊是 18 公分、高是 12 公分；  
平行四邊形丙的底邊是 18 公分、鄰邊是 12 公分；  
下列關於甲、乙、丙三個圖形面積大小順序的描述，何者正確？

- ① 甲 = 乙，乙 > 丙
- ② 甲 = 乙，乙 < 丙
- ③ 甲 > 乙，乙 > 丙
- ④ 甲 > 乙，乙 = 丙

14. 妹妹拿出了一個正三角形、一個正方形及一個長方形的色紙貼成下面的圖形。



已知正三角形周長是 36 公分，長方形較長一邊的長是 26 公分，  
請問長方形面積是多少平方公分？

- ① 76
- ② 234
- ③ 312
- ④ 936

15. 算算看， $308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 = ?$

- ① 196
- ② 260
- ③ 1800
- ④ 4200

16. 下面哪個算式正確？

- ①  $1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} > 1 + \frac{4}{5}$
- ②  $1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} > 1 + \frac{6}{7}$
- ③  $1\frac{4}{5} \times \frac{7}{6} > 1 + \frac{4}{5}$
- ④  $1\frac{4}{5} \times \frac{7}{6} > \frac{7}{6} + \frac{7}{6}$

17. 左圖是「 $53 \div 7$ 」求商到小數第二位的直式計算。  
右圖是「 $53 \div 7$ 」求商到小數第三位的直式計算。

$\begin{array}{r} 7.57 \\ 7 \overline{)53} \\ \underline{49} \phantom{0} \\ 40 \\ \underline{35} \phantom{0} \\ 50 \\ \underline{49} \phantom{0} \\ \phantom{0}1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7.571 \\ 7 \overline{)53} \\ \underline{49} \phantom{0} \\ 40 \\ \underline{35} \phantom{0} \\ 50 \\ \underline{49} \phantom{0} \\ \phantom{0}10 \\ \underline{\phantom{0}7} \phantom{0} \\ \phantom{00}3 \end{array}$
---	--

右圖中的除法直式將左圖除法直式下面的 1 後面補一個 0 繼續除，請問表示什麼意思？

- ① 把 1 個 10 換成 10 個 1
  - ② 把 1 個 1 換成 10 個 0.1
  - ③ 把 1 個 0.1 換成 10 個 0.01
  - ④ 把 1 個 0.01 換成 10 個 0.001
18. 「 $1.99$ 、 $2\frac{3}{10}$ 、 $\frac{14}{5}$ 、 $2.5$ 」，這四個數中，哪個數最大？

- ① 1.99
- ②  $2\frac{3}{10}$
- ③  $\frac{14}{5}$
- ④ 2.5

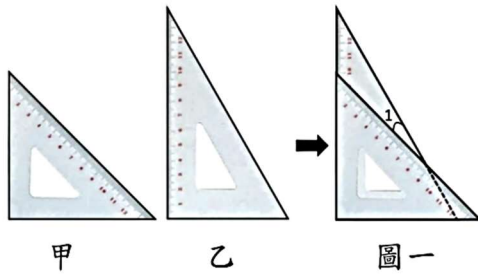
19. 已知三角形的兩邊長分別是 5 公分和 15 公分。  
下列何者可能是這個三角形的周長？

- ① 30 公分
- ② 35 公分
- ③ 40 公分
- ④ 45 公分

20. 日常生活中常聽到「奈米科技」，奈米和毫米一樣，都是長度的單位，  
1 毫米是千分之一米，也就是千分之一公尺，1 奈米是十億分之一米，  
也就是十億分之一公尺。  
頭髮的直徑大約是 40000 奈米，請問 40000 奈米和多少公尺一樣長？

- ① 0.004
- ② 0.0004
- ③ 0.00004
- ④ 0.000004

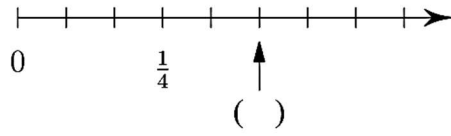
21. 如圖，甲三角板三個角的角度是 45 度、45 度和 90 度，  
乙三角板三個角的角度是 30 度、60 度和 90 度。  
小明將這兩個三角板疊成圖一，請問圖一中角 1 的角度是多少度？



- ① 5  
② 10  
③ 15  
④ 25
22. 一桶果汁有 7 公升，老闆買了 5 桶果汁，用掉了  $\frac{1}{3}$  公升果汁，  
請問用掉了多少桶果汁？

- ①  $\frac{1}{3}$   
②  $\frac{1}{15}$   
③  $\frac{1}{21}$   
④  $\frac{1}{105}$

23. 下面是一條數線，( ) 內要填入哪個數？



①  $\frac{3}{4}$

②  $\frac{5}{8}$

③  $\frac{5}{10}$

④  $\frac{5}{12}$

24. 「甲、乙、丙三人一同出遊，每人先交 1000 元，約定共同分攤旅遊花費。旅遊時花了交通及門票共 960 元，飲食及雜支共 1500 元，請問每人可以退多少元？」下列哪個算式能算出正確的答案？

①  $1000 - (960 + 1500) \div 3$

②  $1000 \times 3 - (960 + 1500)$

③  $(1000 + 960 + 1500) \div 3$

④  $(1000 \times 3 - 960 + 1500) \div 3$

25. 下面是甲、乙、丙、丁四人關於因數與倍數的說法。

甲說：48 最小的因數是 2 。

乙說：48 最大的因數是 48 。

丙說：48 最小的倍數是 1 。

丁說：48 最大的倍數是 48 。

哪些人的說法正確？

- ① 只有乙正確
- ② 只有甲、乙正確
- ③ 只有丙、丁正確
- ④ 甲、乙、丙、丁都正確